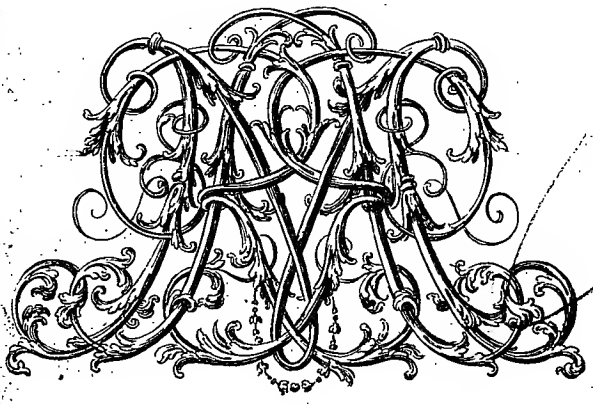
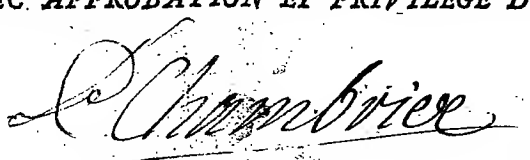
ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.



2345

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire
de l'Univerſité, rue Galande.

M DCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



PREFACE.

IL y a long-temps que les Geometres ſe vantent de pouvoir par leurs methodes découvrir dans les Sciences naturelles, toutes les verités qui ſont à la portée de l'eſprit humain; & il eſt certain que par le merveilleux alliage qu'ils ont fait depuis cinquante ans de la Geometrie avec la Phyſique, ils ont forcé les hommes à reconnoître que ce qu'ils diſent à l'avantage de la Geometrie n'eſt pas ſans fondement. Quelle gloire ſeroit-ce pour cette Science ſi elle pouvoit encore ſervir à regler les jugemens & la conduite des hommes dans la pratique des choſes de la vie!

L'aîné de Meſſieurs Bernoulli ſi connus l'un & l'autre dans le monde ſçavant, n'a pas cru qu'il fût impoſſible de porter la Geometrie juſqu'à ce

point. Il avoit entrepris de donner des Regles pour juger de la probabilité des évenemens futurs, & dont la connoiſſance nous eſt cachée, ſoit dans les Jeux, ſoit dans les autres choſes de la vie où le hazard ſeul a part Le titre de cet Ouvrage devoit être *De arte conjectandi, l'art de deviner.* Une mort prématurée ne lui a pas permis d'y mettre la derniere main.

Monſieur de Fontenelle & Monſieur Saurin ont donné chacun une courte Analyſe de ce Livre; le premier dans l'Hiſtoire de l'Academie; l'autre dans les Journaux des Sçavans de France. Voici, ſelon ces deux Auteurs, quel étoit le plan de cet Ouvrage. M. Bernoulli le diviſoit en quatre parties; dans les trois premieres il donnoit la ſolution de divers Problêmes ſur les Jeux de hazard: on devoit y trouver pluſieurs choſes nouvelles ſur les ſuites infinies, ſur les combinaiſons & les changemens d'ordre, avec la ſolution des cinq Problêmes propoſés depuis long-temps aux Geometres par M. Hugens. Dans la quatriéme partie il employoit les methodes qu'il avoit données dans les trois premieres, à reſoudre diverſes queſtions morales, politiques & civiles.

Année 1705, page 148. Année 1706, page 81.

On ne nous a point appris quels ſont les Jeux dont cet Auteur déterminoit les partis, ni quels ſujets de politique & de morale il avoit entrepris d'éclaircir, mais quelque ſurprenant que ſoit ce projet, il y a lieu de croire que ce ſçavant Auteur l'auroit parfaitement executé. M. Bernoulli étoit trop ſuperieur aux autres pour vouloir en im-

poſer, il étoit de ce petit nombre d'hommes rares qui ſont propres à inventer, & je me perſuade qu'il auroit tenu tout ce que promettoit le titre de ſon Livre.

Rien ne retarde plus l'avancement des Sciences, & ne met un plus grand obſtacle à la découverte des verités cachées, que la défiance où nous ſommes de nos forces. La pluſpart des choſes qui paroiſſent impoſſibles ne le ſont que faute de donner à l'eſprit humain toute l'étendue qu'il peut avoir.

Pluſieurs de mes amis m'avoient excité il y a déja long-temps à eſſayer ſi l'Algebre ne pourroit point atteindre à déterminer quel eſt l'avantage du Banquier dans le Jeu du Pharaon. Je n'avois jamais oſé entreprendre cette recherche, car je ſçavois que le nombre de tous les divers arrangemens poſſibles de cinquante-deux cartes, ſurpaſſe plus de cent mille millions de fois celui des grains de ſable que pourroit contenir le globe de la terre, & il ne me paroiſſoit pas poſſible de démêler dans un nombre ſi vaſte les arrangemens qui ſont avantageux au Banquier, d'avec ceux qui lui ſont contraires ou indifferens. Je ſerois encore dans ce préjugé ſi les ſuccès de feu M. Bernoulli ne m'euſſent invité il y a environ deux ans à chercher les differens hazards de ce jeu. Je fus plus heureux que je n'avois oſé eſperer, car outre la ſolution generale de ce Problême, j'apperçus les routes qu'il falloit tenir pour en découvrir une infinité de pareils,

ou même de beaucoup plus difficiles. Je connus qu'on pouvoit aller fort loin dans ce païs où perſonne n'avoit encore été ; je me flattai qu'on pouvoit y faire une ample recolte de verités également curieuſes & nouvelles : cela me donna la penſée de travailler à fond ſur cette matiere, & le deſir de dédommager en quelque ſorte le Public de la perte qu'il feroit s'il étoit privé de l'excellent Ouvrage de M. Bernoulli. Diverſes reflexions m'ont confirmé dans ce deſſein.

C'eſt particulierement dans les Jeux de hazard que paroît la foibleſſe de l'eſprit humain & la pente qu'il a à la ſuperſtition. Rien n'eſt ſi ordinaire que de voir des Joueurs attribuer leur malheur aux perſonnes qui les approchent, & à d'autres circonſtances qui ne ſont pas moins indifferentes aux évenemens du jeu. Il y en a qui ſe font une loi de ne prendre que des cartes qui gagnent, dans la penſée qu'un certain bonheur leur eſt attaché. D'autres au contraire s'attachent à prendre les cartes perdantes, dans l'opinion qu'ayant pluſieurs fois perdu, il eſt moins vrai-ſemblable qu'elles perdront encore, comme ſi le paſſé pouvoit decider quelque choſe pour l'avenir. Il y en a qui affectent certaines places & certains jours. On en voit qui refuſent de mêler les cartes, ſi ce n'eſt dans certaines ſituations, & qui croiroient perdre infailliblement s'ils s'étoient en cela écartés de leurs regles. Enfin la pluſpart cherchent leurs avantages où ils ne ſont pas, ou bien ils les négligent entierement.

On peut dire à peu près la même choſe de la conduite des hommes dans toutes les actions de la vie où le hazard a quelque part. Ce ſont les mêmes préjugés qui les gouvernent, c'eſt l'imagination qui regle leurs démarches, & qui fait naître aveuglément leurs craintes & leurs eſperances. Souvent ils abandonnent un petit bien certain pour courir temerairement après un plus grand bien, dont l'acquiſition eſt comme impoſſible; & ſouvent par trop de défiance ils renoncent à des eſperances conſiderables & bien fondées, pour ſe conſerver un bien dont la valeur n'a point de proportion avec celui qu'ils négligent. Le principe general de ces préjugés & de ces erreurs eſt que la pluſpart des hommes attribuant la diſtribution des biens & des maux, & generalement tous les évenemens de ce monde à une puiſſance fatale qui agit ſans ordre & ſans regle, ils croyent qu'il vaut autant s'abandonner à cette Divinité aveugle, qu'on nomme Fortune, que de la forcer à leur être favorable en ſuivant des regles de prudence qui leur paroiſſent imaginaires.

J'ai donc cru qu'il ſeroit utile, non ſeulement aux Joueurs, mais aux hommes en general, de ſçavoir que le hazard a des regles qui peuvent être connues, & que faute de connoître ces regles ils font tous les jours des fautes, dont les ſuites fâcheuſes leur doivent être imputées avec plus de raiſon qu'au deſtin qu'ils accuſent. Je pourrois rapporter en preuve une infinité d'exemples tirés

ou des Jeux, ou des autres choſes de la vie dont l'évenement dépend du hazard. Il eſt certain que les hommes ne ſe ſervent point aſſez de leur eſprit pour obtenir ce qu'ils deſirent même avec le plus d'ardeur, & qu'ils ne font point aſſez d'efforts pour ôter à la Fortune ce qu'ils pourroient lui ſouſtraire par les regles de la prudence.

On a cru que cette matiere pourroit exciter la curioſité de ceux même qui en ont le moins pour les connoiſſances abſtraites. L'on aime naturellement à voir clair dans ce qu'on fait, même indépendamment de tout interêt. On joueroit ſans doute avec plus d'agrément ſi l'on pouvoit ſçavoir à chaque coup l'eſperance qu'on a de gagner, ou le riſque que l'on court de perdre. On ſeroit plus tranquile ſur les évenemens du jeu, & on ſentiroit mieux le ridicule de ces plaintes continuelles auſquelles ſe laiſſent aller la pluſpart des Joueurs dans les rencontres les plus communes lorſquelles leur ſont contraires.

Si la connoiſſance exacte des hazards du jeu ne ſuffit pas ſeule aux Joueurs pour les faire gagner, elle peut au moins ſervir à leur faire prendre le meilleur parti dans les choſes douteuſes, &, ce qui eſt fort important, à leur apprendre juſqu'à quel point ſont deſavantageuſes pour eux les conditions de certains Jeux que l'avarice & l'oiſiveté introduiſent tous les jours. Pour moi je crois que ſi les Joueurs ſçavoient que lorſqu'ils mettent au Pharaon un louis de treize livres ſur une carte qui a paſſé trois fois, le talon n'étant plus

que

que de douze cartes, ils font preciſément la même choſe que s'ils donnoient en pur don une livre un ſol & huit deniers au Banquier, il y en auroit peu qui vouluſſent tenter la Fortune avec tant de deſavantage.

La conduite des hommes fait le plus ſouvent leur bonne ou leur mauvaiſe fortune; & les gens ſages donnent au hazard le moins qu'ils peuvent.

Nous ne pouvons connoître l'avenir, mais nous pouvons toujours dans les Jeux de hazard, & ſouvent dans les autres choſes de la vie, connoître avec exactitude combien il eſt plus probable que certaine choſe arrivera de telle façon plutôt que de toute autre! Et puiſque ce ſont là les bornes de nos connoiſſances, nous devons au moins tâcher d'y atteindre.

Tout le monde ſçait qu'au défaut de l'évidence, nous devons chercher la vrai-ſemblance pour nous approcher de la verité; mais on ne ſçait point aſſez qu'il y a des vrai-ſemblances plus grandes & plus petites à l'infini, & que l'eſprit pour être bon juge, en doit diſtinguer tous les degrés, puiſqu'il arrive ſouvent qu'une choſe étant incertaine, il eſt neanmoins certain & même évident qu'elle eſt vrai-ſemblable, & plus vrai-ſemblable que toute autre.

Il paroît qu'on ne s'eſt point aſſez apperçu juſqu'à preſent qu'on pût donner des regles infaillibles pour calculer les differences qui ſe trouvent entre diverſes probabilités.

**

On a voulu donner dans cet Ouvrage un eſſai de ce nouvel art, en l'appliquant à une matiere qui a été juſqu'ici dans une grande obſcurité, & qui ne paroît ſuſceptible d'aucune préciſion. On a cru qu'elle étoit plus propre que toute autre à donner de l'eſtime pour l'Analyſe, cet art merveilleux qui eſt la clef de toutes les Sciences exactes, & qui n'eſt apparemment négligé que parcequ'on ne connoît point aſſez l'étendue de ſes uſages; car au lieu qu'on n'a employé juſqu'ici l'Algebre & l'Analyſe qu'à découvrir des raports conſtants & immuables entre des nombres & des figures, on s'enſert ici pour découvrir des raports de probabilité entre des choſes incertaines & qui n'ont rien de fixe, ce qui ſemble fort oppoſé à l'eſprit de la Geometrie, & en quelque façon hors de ſes regles. C'eſt ce que fait judicieuſement ſentir l'illuſtre Auteur de l'Hiſtoire de l'Academie dans l'endroit que j'ai déja cité. *Il n'eſt pas ſi glorieux*, dit-il, *à l'eſprit de Geometrie de regner dans la Phyſique que dans les choſes de morale, ſi caſuelles, ſi compliquées, ſi changeantes. Plus une matiere lui eſt oppoſée & rebelle, plus il a d'honneur à la dompter.*

Je diviſe ce Traité en trois Parties: dans la premiere je donne la ſolution de divers Problêmes ſur les Jeux de cartes qui ſont en uſage; j'examine d'abord ceux qui ſont de pur hazard, tels que le Pharaon, la Baſſete, le Lanſquenet & le Treize; je détermine quel eſt l'avantage ou le deſavantage des Joueurs dans toutes les circonſtances poſſibles de ces Jeux. Les Geometres trouveront dans

la ſolution de ces Problêmes toute la generalité qu'ils pourront ſouhaiter ; & les Joueurs y rencontreront des nouveautés fort ſingulieres, dont il leur eſt important d'être inſtruits. L'on s'eſt borné à examiner ces quatre Jeux pour ne point faire un trop gros Volume, & on les a preferés aux autres parcequ'ils ſont plus en uſage, & qu'ils m'ont paru les plus curieux. Je donne enſuite divers Theorêmes ſur les combinaiſons, dont la pluſpart ſont nouveaux & d'un fort grand uſage ; je les applique ici à reſoudre pluſieurs Problêmes particuliers ſur l'Hombre, le Piquet, l'Imperiale, le Brelan, &c. Je n'ai pû traiter ces derniers Jeux avec la même étendue que les précedens, j'en rend raiſon dans les pages 75, 76, 77 & 78.

La ſeconde partie contient une ſolution generale de toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur le Quinquenove, le Jeu des trois dez, & le Jeu du hazard. Les deux premiers ſont les ſeuls Jeux de dez qui ſoient en uſage en France, le dernier n'eſt connu qu'en Angleterre. Je donne enſuite des regles pour jouer le plus parfaitement qu'il ſe puiſſe un Jeu dont l'invention eſt ingenieuſe, & qui tient également de deux Jeux de cartes le Her & la Tontine. La perſonne qui m'a appris ce Jeu n'a pû me dire comment on le nomme. Pour ne le point laiſſer ſans nom, je l'ai appellé Jeu de l'Eſperance. On y trouvera auſſi la ſolution de quelques Problêmes aſſez faciles ſur le Jeu du Trictrac. Il y en a un qui peut être de quelque utilité pour les Joueurs.

Je finis cette ſeconde Partie par un Problême très general ſur les dez. Ce Problême avec celui de la Propoſition 14, renferme toute la theorie des combinaiſons. J'y ajoute comme pour ſervir d'Exemple trois Problêmes, il y en a un ſur le Jeu de la premiere Raſle ; le ſecond eſt ſur les trois Raſles comptées ; le dernier eſt ſur un Jeu dont le Baron de la Hontan fait mention dans le ſecond Tome de ſes Voyages, & qu'il dit être fort en uſage parmi les Sauvages de Canada. Le nom n'en eſt pas magnifique, il s'appelle le Jeu des Noyaux.

On pourra remarquer que tous les differens Jeux de dez qu'on examine dans cette ſeconde Partie, donnent du deſavantage à celui qui tient le dé, au lieu que dans les Jeux de cartes tels que le Pharaon, la Baſſete, le Lanſquenet, le Treize, celui qui tient les cartes a un avantage conſiderable.

Il eſt à croire que ceux qui ont inventé ces Jeux n'ont point prétendu les rendre entierement égaux ; ou, ce qui paroît plus vrai-ſemblable, qu'ils n'en ont point aſſez connu la nature pour en bien diſtribuer les hazards. Dans la pluſpart les conditions ſont ſi inégales pour les Joueurs, qu'on ſeroit bien fondé à ſoutenir qu'on ne peut y gagner avec juſtice, comme ſans doute on ne peut y perdre ſans être duppe.

Quoique dans ce Traité j'aye beaucoup plus en vûe le plaiſir des Geometres que l'utilité des Joueurs, & que ſelon nous ceux qui perdent leur temps au Jeu meritent bien d'y perdre leur argent,

je n'ai point négligé en découvrant l'avantage ou le desavantage des Joueurs, de faire remarquer de quelle maniere il faudroit reformer les Jeux pour les rendre parfaitement égaux.

Dans la troisiéme Partie je donne la solution des cinq Problêmes proposés par Mr Hugens, & j'en ajoute quelques autres, qui quoique moins curieux & moins difficiles que ceux qui sont contenus dans les deux Parties précedentes, ne laissent pas d'avoir leur utilité par raport à cette matiere. Je la termine en proposant, à l'imitation de M. Hugens, quatre Problêmes assez singuliers. Mais je crois devoir avertir les Geometres qui auroient la curiosité d'en tenter la solution, qu'ils n'y trouveront pas moins de difficulté que dans les plus difficiles Problêmes de calcul integral. Ceux qui ne regarderoient ces questions que comme des Problêmes d'Arithmetique, reconnoîtront que si elles suppoſent moins de connoissance en Geometrie, elles demandent peut-être plus d'adresse, & certainement beaucoup plus d'exactitude & de circonspection.

Si je m'étois proposé de suivre en tout le projet de M. Bernoulli, j'aurois dû ajouter une quatriéme Partie, où j'eusse fait l'application des methodes contenues dans les trois premieres, à des sujets politiques, œconomiques ou moraux. Ce qui m'en a empêché, c'est l'embarras où je me suis trouvé de faire des hypotheses qui étant appuyées sur des faits certains, pussent me conduire & me soutenir dans mes recherches: Mais n'ayant point

eu la commodité de me ſatisfaire entierement là deſſus, j'ai cru qu'il valoit mieux remettre ce travail à un autre temps, ou en laiſſer la gloire à quelqu'autre perſonne plus habile que moi, que de dire des choſes ou trop communes ou peu exactes, qui n'euſſent point répondu à l'attente du Lecteur & à la beauté du ſujet. Je me bornerai à faire remarquer en moins de mots qu'il me ſera poſſible, le raport qu'il y a entre cette matiere & celle des Jeux, & les vûes qu'il faudroit prendre pour y réuſſir.

A parler exactement rien ne dépend du hazard; quand on étudie la nature, on eſt bientôt convaincu que ſon Auteur agit d'une maniere generale & uniforme qui porte le caractere d'une ſageſſe & d'une preſcience infinie. Ainſi pour attacher à ce mot *hazard* une idée qui ſoit conforme à la vraye Philoſophie, on doit penſer que toutes choſes étant reglées ſelon des loix certaines, dont le plus ſouvent l'ordre ne nous eſt pas connu, celles là dépendent du hazard [illegible] nt la cauſe naturelle nous eſt cachée. Aprés cette définition on peut dire que la vie de l'homme eſt un Jeu où regne le hazard.

Pour faire voir plus preciſément que l'Analyſe des Geometres, & principalement celle qu'on employe dans ce Traité, eſt propre à diſſiper en partie les tenebres qui ſemblent répandues ſur les choſes de la vie civile qui ont raport à l'avenir, il faut remarquer que de même qu'il y a des Jeux qui ſe reglent par le hazard ſeul, & d'autres qui

ſe reglent en partie par le hazard & en partie par l'habileté des Joueurs; ainſi entre les choſes de la vie il y en a dont le ſuccès dépend entierement du hazard, & d'autres auſquelles la conduite des hommes a beaucoup de part; & que generalement dans toutes les choſes de la vie ſur leſquelles nous avons à prendre notre parti, notre déliberation doit ſe reduire, comme dans les paris ſur les Jeux, à comparer le nombre des cas où arrivera un certain évenement, au nombre des cas où il n'arrivera pas; ou, pour parler en Geometre, à examiner ſi ce que nous eſperons multiplié par le degré de probabilité qu'il y a que nous l'obtiendrons, égale ou ſurpaſſe notre miſe, c'eſt à dire les avances que nous devons faire, ſoit peine, ſoit argent, ſoit credit, &c.

Il ſuit de là que les mêmes regles d'Analyſe qui nous ont ſervi à déterminer dans les Jeux les partis des Joueurs & la maniere dont ils doivent conduire leur Jeu, peuvent auſſi ſervir à déterminer le juſte degré de nos eſperances dans nos diverſes entrepriſes, & à nous apprendre la conduite que nous devons tenir pour y trouver le plus d'avantage qu'il ſoit poſſible. Il eſt clair, par exemple, que la même methode qui nous a ſervi à déterminer dans quelles circonſtances il eſt à propos à l'Hombre de renoncer aux fiches du ſans-prendre dans l'eſperance de faire la volle, peut être employée, quoique plus difficilement, pour déterminer dans quelles circonſtances de la vie il faut ſacrifier un petit bien dans l'eſperance d'en obtenir un plus grand.

Pour continuer cette comparaiſon, il faut remarquer que les mêmes raiſons qui nous empêchent de pouvoir reſoudre toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les Jeux, empêchent auſſi qu'on ne puiſſe reſoudre celles qu'on peut propoſer ſur les choſes de la vie civile. Ces raiſons ſont de deux ſortes : la premiere eſt l'incertitude où nous ſommes du parti que prendront à notre égard ceux dont les actions doivent regler l'évenement de nos entrepriſes. Le choc d'un corps decide & de la route qu'il doit tenir & de la viteſſe qu'il doit avoir ; car les loix des communications des mouvemens ſont fixes & invariables. Mais les raiſons & les differens motifs que les hommes peuvent avoir pour agir d'une façon plutôt que d'une autre, ne peuvent nous aſſurer de quel côté ils ſe détermineront. Souvent ils ne connoiſſent point leurs interêts, & ſouvent ils ne les ſuivent pas lorſqu'ils les connoiſſent, le caprice les détermine beaucoup plus que la raiſon, & c'eſt toujours deviner que de vouloir juger de ce qui dépend de la liberté des hommes.

La ſeconde cauſe de notre ignorance dans les choſes qui dépendent de l'avenir, eſt fondée ſur ce que les bornes de notre eſprit étant fort étroites, toutes les connoiſſances qui ſuppoſent un trop grand nombre de rapports ſont au deſſus de ſes forces. Or dans pluſieurs Jeux, & dans la pluſpart des choſes de la vie, les comparaiſons qu'il faut faire ſont en ſi grand nombre, qu'il n'eſt preſque pas poſſible de les épuiſer.

Déterminer combien vaut le dé entre deux Joueurs égaux au Jeu du Trictrac, & combien vaut la main au Piquet, quelle piece eſt la plus avantageuſe au Jeu des Echets du fou ou du cavalier, & de combien l'une eſt meilleure que l'autre; ce ſont-là des Problêmes dont je tiens la ſolution impoſſible aux hommes. Il en eſt de même, & pour les mêmes raiſons de la pluſpart des queſtions de morale & de politique: par exemple, déterminer ſi dans telle & telle circonſtance je dois avoir plus d'égard à la recommandation d'un parent, qu'à la priere d'un certain nombre d'amis: Si un certain commerce eſt avantageux ou préjudiciable à une Nation; quel doit être le ſuccès d'une négociation & d'une entrepriſe militaire, &c.

Les contrats d'aſſurance qui ſont ſi communs parmi les Marchands, principalement dans les Républiques, n'enrichiſſent pas toujours les Aſſureurs; & les plus habiles Politiques d'Angleterre éprouvent tous les jours à leur perte dans ces groſſes gageures qu'on fait en ce pays-là ſur les évenemens de la guerre, que la prudence des hommes eſt inſuffiſante pour penetrer ſurement dans l'avenir.

Il eſt vrai qu'avec beaucoup de juſteſſe d'eſprit, une grande connoiſſance des faits, & ſurtout des reſſorts ſecrets qui donnent le branle & le mouvement aux affaires, on peut découvrir avec aſſez de vrai-ſemblance quel eſt le meilleur parti dans ces gageures: mais il eſt impoſſible d'en venir jamais au point de pouvoir déterminer par le

raport exact de deux nombres, combien un parti eſt meilleur que l'autre.

Quelque ſecours que l'eſprit humain puiſſe recevoir de la Geometrie, cette vertu, que l'on nomme prudence, n'aura jamais que des regles incertaines; pour un petit nombre de verités & de principes certains que contiennent la politique & la morale, on y trouve une infinité d'obſcurités impenetrables à l'eſprit humain.

Tout l'uſage qu'on peut tirer de la Geometrie par raport à ces ſortes de Problêmes, conſiſte en ce qu'on peut aſſurer que ceux qui ſe ſeront rendu familiere l'eſpece de Logique dont on fait uſage dans ce Traité, en ſeront plus propres à découvrir les differens degrés de probabilité dans les divers partis qu'on peut prendre ſur les choſes qui regardent la morale, ou ſur celles qui ont rapport à la vie civile, & à éviter l'erreur dans leurs jugemens par l'habitude qu'ils auront acquiſe de diſtinguer le vrai d'avec le vrai-ſemblable, & de ne donner leur conſentement qu'à l'évidence.

Que les hommes en penſent ce qu'ils voudront, il eſt certain que cette force & cette juſteſſe d'eſprit qu'on acquiert dans la recherche des verités abſtraites, s'étend auſſi aux verités ſenſibles, & pour ainſi dire de pratique. L'Analyſe eſt un inſtrument qui ſert à tout quand on le ſçait bien manier. Toutes les verités ſe tiennent entr'elles, & quand on a fait quelque temps eſſai de ſes forces ſur les notions exactes que nous avons des nombres & de l'étendue, on les employe avec

plus de ſuccès ſur les connoiſſances moins exactes qui peuvent être l'objet de notre eſprit. Ceux qui ont le mieux écrit ſur la Metaphyſique, la Phyſique, peut-être même ſur la Medecine & ſur la Morale, étoient d'excellens Geometres. L'experience devroit donc convaincre de l'utilité de la Geometrie ceux à qui les raiſons ne la peuvent perſuader.

Pour terminer ce parallele entre les Problêmes ſur les Jeux, & les queſtions qu'on peut propoſer ſur les choſes œconomiques, politiques & morales, il faut obſerver que dans ces dernieres comme en celles des Jeux, il y a une eſpece de Problêmes qu'on pourra reſoudre en obſervant ces deux regles; 1°. borner la queſtion que l'on ſe propoſe à un petit-nombre de ſuppoſitions, établies ſur des faits certains; 2°. faire abſtraction de toutes les circonſtances auſquelles la liberté de l'homme, cet écueil perpetuel de nos connoiſſances, pourroit avoir quelque part. Il eſt à croire que M. Bernoulli avoit égard à ces regles dans la quatriéme partie de ſon Ouvrage, & il eſt certain qu'avec ces deux reſtrictions on pourroit traiter pluſieurs ſujets ou de politique ou de morale avec toute l'exactitude des verités geometriques.

C'eſt ce qu'a fait admirablement M. Halley dans un Memoire qui ſe trouve dans les Tranſactions philoſophiques d'Angleterre, num. 196, où ce ſçavant Anglois entreprend de déterminer le degré de la mortalité du genre humain. Ce morceau eſt plein de choſes curieuſes, dont le

Lecteur verroit ici l'extrait avec plaiſir : Mais cette Preface étant peut-être déja trop longue, je n'en rapporterai qu'une qui eſt traitée par l'Auteur avec beaucoup de fineſſe. C'eſt une methode pour déterminer ſur quel pied ſe doivent regler les rentes à fond perdu. Il donne une Table toute calculée pour les differens âges de cinq en cinq années depuis un an juſqu'à ſoixante & dix. Cette Table fait voir combien étoit avantageux aux Anglois le parti que leur faiſoit alors le Roy Guillaume, en donnant 14 pour cent par année de rente viagere, ce qui eſt à peu près la ſeptiéme partie du fond. On voit par cette Table qu'une perſonne âgée de dix ans n'en devroit avoir que la treiziéme partie, & un homme âgé de trente-ſix ans la onziéme, & enfin que l'interêt de dix pour cent n'eſt dû qu'aux perſonnes âgées de quarante-trois à quarante-quatre ans. Il pouſſe encore cette idée plus loin, & il examine ſur quel pied devroit ſe regler une rente viagere qui ſeroit ſur la tête de deux ou de pluſieurs perſonnes de differens âges.

Cette matiere paroît épuiſée dans le Memoire de M. Halley. On en trouve quelques autres ſemblables maniées aſſez heureuſement, quoiqu'avec moins d'exactitude, dans l'Arithmetique politique du Chevalier Petty. Mais il en reſte pluſieurs autres de cette nature qu'on pourroit traiter avec le même ſuccès & la même utilité pour le Public.

Je crois devoir parler maintenant de deux Geometres illuſtres à qui je dois les premieres vûes que

j'ai eues sur le sujet que je traite. En 1654 M. Pascal resolut ce Problême : *Deux personnes jouent à un jeu égal en un certain nombre de points ; l'une des deux est supposée avoir plus de points que l'autre : On demande comment elles doivent partager l'argent du Jeu en cas qu'elles veuillent rompre la partie sans la finir.* On peut voir la solution de ce Problême dans un Livre fort court qu'on a trouvé imprimé après sa mort, & qui a pour titre, *Triangle Arithmetique.* Ce grand Homme qui avoit beaucoup médité sur les proprietés des nombres, fait diverses applications de ce triangle aux regles des partis & aux combinaisons.

Le Chevalier de Meré lui avoit proposé ce Problême, il lui en avoit aussi proposé quelques autres sur les dez : Par exemple, déterminer en combien de coups on peut amener une certaine rafle, & quelques autres de cette sorte assez faciles. Ce Chevalier, qui étoit plus bel esprit que Geometre, resolut les Problêmes sur les dez, mais ni lui ni M. de Roberval ne purent resoudre celui des partis. M. Pascal le proposa à M. Fermat avec qui il étoit en commerce d'amitié & de Geometrie, & qui en cette Science n'étoit inferieur qu'à M. Descartes.

Ce Geometre parvint à la solution du Problême par une voye differente de celle de M. Pascal : Il alla même plus loin, & il assura que sa methode étoit generale pour tel nombre de Joueurs qu'il y eût. M. Pascal ne crut pas qu'elle pût le conduire jusque là, & il tâche de lui faire voir dans une lettre qui se trouve avec quelques autres sur ce sujet

dans les Ouvrages posthumes de M. Fermat imprimés à Toulouse, que sa methode, qu'il reconnoît bonne pour deux Joueurs, n'est pas juste pour un plus grand nombre. On ne voit point dans ce Recueil la réponse de M. Fermat, mais il est certain que le droit étoit de son côté ; sa methode est sûre, & s'étend à tel nombre de Joueurs que ce soit.

A peu près dans ce temps M. Hugens, ce fameux Geometre qui a enrichi toutes les parties des Mathematiques de tant de belles découvertes, ayant entendu parler de ces Problêmes, entreprit de les resoudre, & employa, pour en venir à bout, la methode analytique, qui pour l'ordinaire mene plus loin que toute autre. Il fit de ces Problêmes un petit Traité latin qui compose environ une feuille, & se trouve à la fin du Livre de M. Schotten, intitulé, *Exercitationes Geometricæ.*

Quoique cet Auteur n'entreprenne de déterminer les partis des Joueurs dans aucun jeu de cartes ni de dez, & qu'il se borne à ce qu'il y a de plus facile en cette matiere, & presque aux seuls Problêmes de M. Pascal, on voit par la lettre qu'il écrit à M. Schotten, qu'il estimoit beaucoup ce qu'il donne dans ce petit Ouvrage. *Rien n'est plus glorieux*, dit-il, *à l'art dont nous faisons usage dans ce Traité, que de pouvoir donner des regles à des choses qui étant dépendantes du hazard, semblent n'en reconnoître aucune, & par là se soustraire à la raison humaine.* Et il ajoute : *Je m'assure que ceux qui sçavent juger des choses, reconnoîtront en lisant cet écrit, que le sujet en est*

plus ſérieux & plus important qu'il ne paroît, que l'on y poſe les fondemens d'une théorie très belle & très ſubtile, & que les recherches de Diophante, qui n'ont pour objet que des proprietés abſtraites des nombres, ſont & plus faciles, & moins agréables que celles que l'on peut ſe propoſer en cette matiere.

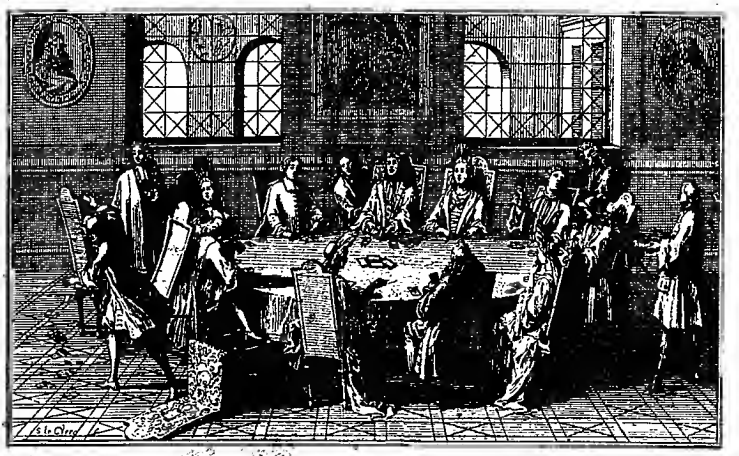
L'Auteur à la fin de ce Traité invite les Geometres à la recherche de cinq Problêmes, dont aucun que je ſçache n'a encore été reſolu. Il y en a trois de ces cinq dont il donne la ſolution, mais ſans analyſe ni démonſtration, & il ne donne point la ſolution des autres.

Comme c'eſt principalement pour les Geometres que j'ai compoſé ce Traité, & que pour l'ordinaire les Sçavans ne ſont pas Joueurs, j'ai cru devoir expliquer fort au long les Jeux dont je parle dans cet Ouvrage, & j'ai tâché de n'obmettre aucune circonſtance neceſſaire. Je m'étois propoſé d'abord de mettre en langage ordinaire la ſolution de quelques-uns des Problêmes les plus faciles, tels que ſont ceux de la troiſiéme Partie : mais j'ai été contraint d'abandonner ce deſſein, pour n'être point obligé de faire des diſcours infinis que perſonne n'auroit eu la patience de ſuivre. L'uſage de l'Algebre eſt de repreſenter à l'eſprit un grand nombre d'idées ſous des expreſſions fort courtes, & de lui fournir de grandes facilités pour parcourir avec promptitude les raports des choſes que l'on conſidere. J'ai cru que ne voulant point faire un gros Livre, je ne devois point renoncer à cet avantage ; je me ſuis ſeulement attaché à

m'expliquer de telle maniere dans la concluſion de chaque Problême, & dans les Corollaires & les Remarques qui ſont à la fin de chaque ſolution, que je puſſe être entendu de tout le monde, & même des Joueurs.

Comme on n'écrit que pour être lû, j'ai tâché de rendre facile la lecture de cet Ouvrage, & j'ai préferé ſans peine la ſatisfaction du Lecteur à l'eſtime de ces eſprits mediocres, qui n'admirent que ce qui leur coute beaucoup de peine, & ce qui leur paroît au deſſus de leur portée. On trouvera que je me ſuis fort étendu dans les endroits que j'ai cru difficiles, & principalement dans ceux qui devoient répandre leur lumiere ſur pluſieurs verités. Mais comme je ſçai auſſi que l'utilité d'un Livre de Mathematique conſiſte moins dans les verités qu'il découvre que dans la diſpoſition qu'il donne à l'eſprit d'en découvrir de pareilles, & qu'on acquiert beaucoup plus cette diſpoſition en trouvant ce que l'Auteur a déja trouvé, qu'en le ſuivant pas à pas, j'ai cru que je ne devois point me gêner à expliquer tout en détail, & même à tout démontrer, & qu'il me ſuffiſoit de ne laiſſer aucune difficulté dont on ne pût trouver la ſolution avec une application ſuffiſante. Enfin je me ſuis propoſé d'épargner au Lecteur le travail de l'invention, & de lui en laiſſer en quelque ſorte le plaiſir.

PROBLEMES



PROBLÈMES
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

PREMIERE PARTIE.

DEFINITION I.

DANS les Jeux, les Gageures & les Loteries, l'argent que risque un Joueur est censé ne lui plus appartenir, car il en a quitté la proprieté ; mais en revanche il acquiert un certain droit sur le fond du Jeu, c'est à dire, sur l'argent de la gageure.

Lorsque les conditions du jeu sont également avantageuses aux Joueurs, comme dans le Passe-dix, & un petit nombre d'autres Jeux, ce droit ou l'esperance qu'il fournit est équivalent à la mise de chacun des Joueurs. Mais dans les Jeux, dont les conditions sont inégalement avanta-

geuſes aux Joueurs, tels que ſont le plus grand nombre, ce droit ne répond plus exactement à la miſe des Joueurs; & en ce cas, s'ils veulent ſe retirer & quitter la partie, pour rentrer en la propriété de quelque choſe, en renonçant à ce que le hazard leur auroit donné, ils ne doivent plus partager également l'argent du jeu, mais ils en doivent prendre une partie plus ou moins grande, ſelon qu'il y a plus ou moins de probabilité que les uns ou les autres gagneront la ſomme entiere dont on eſt convenu.

Cela poſé, ſi l'on nomme a l'argent du Jeu, je dirai que le *ſort* de chaque Joueur eſt le juſte degré d'eſperance qu'il a d'obtenir a; & j'appellerai, *parti*, la convention ou le reglement que des Joueurs doivent faire entr'eux, lorſqu'ils veulent ſe retirer ſans courir le riſque de l'évenement du Jeu; en ſorte qu'il leur ſoit entierement égal, ou de continuer la partie, ou de la rompre.

Ainſi, en ſuppoſant que deux Joueurs ſoient convenus d'hazarder chacun une demie piſtolle à croix ou pile, ſi l'on nomme la piſtolle a, je dirai que le ſort de chacun des Joueurs eſt $\frac{1}{2}a$; & que ſi changeant d'avis ils veulent quitter le Jeu, le parti qu'ils ſe doivent faire l'un à l'autre, c'eſt de retirer chacun leur demie piſtolle.

DE'FINITION II.

SI deux Joueurs veulent jouer ſans avantage ni deſavantage à un Jeu dont les conditions ſoient inégales, il faut que celui, à qui elles ſont favorables, mette au Jeu plus que l'autre; & pour parler avec préciſion, il faut que ſa miſe ſoit à celle de l'autre Joueur dans la même raiſon que les divers degrés d'eſperance qu'ils ont de gagner. S'ils jouent but à but, il eſt clair que l'avantage eſt pour l'un de ces Joueurs, & qu'il faut entendre par ce mot, *avantage*, l'excès de ce qu'il attend du hazard ſur ce qu'il met au Jeu. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que Paul pariant but à but un écu contre Pierre, d'amener un doublet du premier coup avec deux dez, on ait trouvé pour le ſort

de Pierre $A + \frac{2}{3}A$, A désignant un écu, cette fraction $\frac{2}{3}A$ qui est l'excès de l'espérance ou du sort de Pierre sur sa mise qui est A, exprimera son avantage, ou ce que Paul devroit donner à Pierre, si après avoir fait cette convention avec lui, il vouloit rompre la gageure, puisqu'en vertu de la condition de cette gageure, Pierre n'a pas moins de droit sur les deux tiers de l'écu de Paul, qu'il en a sur l'écu qu'il a mis au jeu.

Car il faut remarquer que quoiqu'il soit très incertain si Paul gagnera ou ne gagnera pas, & qu'il n'y ait point de contradiction qu'il gagne mille fois de suite, il est neanmoins très certain que pour acheter le droit de Pierre il faudroit lui donner quarante sols; & que si Paul s'obligeoit de jouer trois coups aux conditions précedentes, Pierre pourroit aussi-bien compter sur deux écus de profit comme sur deux écus que Paul lui auroit donné en pur don, à condition qu'il voulût jouer trois écus contre lui à croix ou pile.

Quoique ces termes *avantage* & *desavantage* semblent être clairs, parcequ'ils sont communs & familiers, j'ai crû qu'il étoit à propos pour ôter toute equivoque, d'expliquer de quelle maniere je les entends; il m'a paru que presque tout le monde y attachoit de fausses idées.

PROPOSITION I.

LEMME.

Le nombre des hazards qui peuvent faire gagner Pierre, & lui donner A, *étant* m; *& le nombre des hazards qui peuvent le faire perdre ou lui donner zero, étant* n, *je dis que s'il n'y a que ces deux sortes de hazards, & qu'on entende par* A *l'argent du jeu, on aura le sort de Pierre* $= \frac{mA + nX0}{m+n}$.

POUR le prouver, soit x le sort de Pierre, y celui de l'autre Joueur, qu'on nommera Paul, on aura $x + y = A$. On aura aussi $x . y :: m . n$, car le sort de chacun de ces

Joueurs eſt comme leur eſperance, & cette eſperance eſt proportionnée aux facilités ou aux moyens qu'ils ont de gagner, c'eſt à dire au nombre de coups qui leur donneront A. De ces deux équations $y = \frac{nx}{m}$ & $x + y = A$, on tirera $x = \frac{Am}{m+n}$ C. Q. f. D.

Ainſi ſuppoſant, par exemple, que Pierre parie contre Paul d'amener un 6 du premier coup avec un dé, ſon ſort ſera $\frac{1 \times A + 5 \times 0}{1+5} = \frac{1}{6}A$, & le ſort de Paul ſera $\frac{5}{6}A$: D'où il ſuit que pour parier également, Pierre devroit mettre un écu au jeu, contre Paul cinq écus, puiſque dans une gageure égale les miſes de deux Joueurs doivent avoir le même raport que les divers degrés de probabilité ou d'eſperance que chacun des Joueurs a de gagner.

J'aurois pu énoncer ce Lemme plus generalement, la démonſtration eût été la même, mais j'ai apprehendé de rendre obſcure une choſe qui me paroît de la derniere évidence, ſçavoir que le ſort de Pierre eſt le raport de tous les coups qui lui ſont favorables au nombre de tous les coups poſſibles; ou, ſi l'on veut, que ſon ſort eſt le raport du degré d'eſperance ou de facilité qu'il a de gagner, au riſque qu'il court de perdre.

PROBLÊME
SUR LE PHARAON.

Déterminer generalement l'avantage du Banquier par raport aux Pontes.

LEs principales regles de ce Jeu ſont, 1°, que le Banquier taille avec un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes. 2°. Que le Banquier tire toutes les cartes de ſuite, mettant les unes à ſa droite & les autres à ſa gauche, en commençant par la droite. 3°. Qu'à chaque main ou à chaque taille, c'eſt à dire de deux en deux cartes, le Ponte a la liberté de prendre une ou pluſieurs cartes, & de hazarder deſſus une certaine ſomme. 4°. Que le Ban-

quier gagne la mise du Ponte, lorsque la carte du Ponte arrive à la main droite dans un rang impair ; & qu'il perd, lorsque la carte du Ponte tombe à la main gauche & dans un rang pair. 5°. Que le Banquier prend la moitié de ce que le Ponte a mis sur sa carte, lorsque dans une même taille la carte du Ponte vient deux fois, ce qui fait une partie de l'avantage du Banquier. Et enfin, que la derniere carte qui devroit être pour le Ponte, n'est ni pour lui ni pour le Banquier, ce qui est encore un avantage pour le Banquier.

Il est évident que les conditions de ce Jeu sont avantageuses au Banquier. La difficulté est de déterminer cet avantage, car il change, & selon le nombre des cartes que tient le Banquier, & aussi selon que la carte du Ponte ou n'a point passé ou a passé une ou plusieurs fois.

1°. La carte du Ponte n'étant qu'une fois dans le talon, la difference du sort du Banquier & du Ponte est fondée sur ce que entre tous les divers arrangemens possibles des cartes du Banquier, il y en a un plus grand nombre qui le font gagner, qu'il n'y en a qui le font perdre, la derniere carte étant considerée comme nulle ; & dans ce cas il est aisé de s'appercevoir que l'avantage du Banquier augmente, à mesure que le nombre des cartes du Banquier diminue.

2°. La carte du Ponte étant deux fois dans le talon, l'avantage du Banquier se tire de la probabilité qu'il y a, que la carte du Ponte viendra deux fois dans une même taille : Car alors, le Banquier gagne la moitié de la mise du Ponte, excepté le seul cas, où la carte du Ponte viendroit en doublet dans la derniere taille, ce qui donneroit au Banquier la mise entiere du Ponte.

3°. La carte du Ponte étant ou trois ou quatre fois dans la main du Banquier, l'avantage du Banquier est fondé sur la possibilité qu'il y a, que la carte du Ponte se trouve deux fois dans une même taille, avant qu'elle soit venue en pur gain ou en pure perte pour le Banquier. Or cette possibilité augmente ou diminue, & selon qu'il y a plus ou moins de cartes dans la main du Banquier, & selon que la

carte du Ponte s'y trouve plus ou moins de fois. De tout cela il ſuit que pour connoître l'avantage du Banquier par rapport aux Pontes dans toutes les differentes circonſtances de ce Jeu, il faut découvrir dans tous les differens arrangemens poſſibles des cartes que tient le Banquier, & dans la ſuppoſition que la carte du Ponte s'y trouve, ou une, ou deux, ou trois, ou quatre fois, quels ſont ceux qui le font entierement gagner, quels ſont ceux qui lui donnent la moitié de la miſe du Ponte, quels ſont ceux qui le font perdre, & enfin quels ſont les arrangemens qui ne le font ni perdre ni gagner.

Pour réſoudre generalement ce Problême, il eſt à propos de commencer par les cas les plus ſimples; & enſuite paſſant à des cas plus compoſés, il faut chercher quelque loi uniforme & quelqu'analogie qui puiſſe ſervir à démêler dans tous les cas poſſibles, les arrangemens qui ſont avantageux au Banquier, ceux qui lui ſont indifferens, & enfin ceux qui lui ſont défavorables. Cette methode eſt la ſeule qu'on puiſſe utilement mettre en uſage, lorſqu'on a comme dans ce Problême, un fort grand nombre de comparaiſons à faire. C'eſt auſſi la voye la plus naturelle, pour conduire l'eſprit du Lecteur en ces matieres, & pour le préparer à une ſolution generale.

PROPOSITION II.

PREMIER CAS.

On ſuppoſe qu'il reſte quatre cartes entre les mains du Banquier, & que celle du Ponte y eſt un certain nombre de fois. Il s'agit de déterminer quel eſt le ſort du Banquier & celui du Ponte : Par exemple, s'il y a un écu ſur la carte du Ponte, on demande quelle partie de l'écu le Ponte devroit donner au Banquier pour acheter le droit de ſe retirer, & de ne point courir le riſque du jeu ; ou, ce qui revient au même, quel eſt dans ce cas le deſavantage du Ponte en jouant but à but contre le Banquier.

IL faut diviſer tout ce que tous les divers arrangemens poſſibles des quatre cartes donnent de gain ou de perte au Banquier par le nombre de tous ces arrangemens ; l'expoſant de cette diviſion exprimera ſon ſort.

Pour découvrir ces arrangemens differens, il faut obſerver que deux lettres, *a* & *b*, peuvent s'arranger en deux façons, *ab*, *ba* ; que trois lettres, *a*, *b*, *c*, peuvent s'arranger de ſix façons differentes : ce qui ſe voit en mettant *c* dans *ab*, & *ba* à toutes les places qu'il peut avoir ; ſçavoir, à la premiere, à la ſeconde, & à la troiſiéme. Ces ſix arrangemens ſont :

abc	*bac*	*cab*
acb	*bca*	*cba*

On trouvera de même que quatre lettres, *a*, *b*, *c*, *d*,

peuvent s'arranger en vingt-quatre façons differentes, puiſque *d* peut occuper quatre places differentes dans chacun des ſix arrangemens précedens.

Generalement, ſi l'on nomme *p* le nombre des lettres qu'on veut arranger de toutes les manieres poſſibles, *q* le nombre de tous les divers arrangemens poſſibles d'un nombre de lettres exprimé par $p - 1$, pq exprimera en combien de façons differentes on peut arranger des lettres dont le nombre ſoit exprimé par *p*. Par exemple, ſi l'on veut ſçavoir en combien de façons differentes quatre lettres peuvent être arrangées, on aura en ſubſtituant pour *p* ſa valeur quatre, & pour *q* ſa valeur ſix. $pq = 24$, & ce nombre exprimera en combien de façons differentes quatre lettres peuvent s'arranger.

Cela poſé, ſi l'on veut exprimer les quatre cartes du Banquier par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, on aura tous les arrangemens differens de quatre cartes repreſentés dans la Table ſuivante.

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcba*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcab*

1°. Si l'on ſuppoſe que la carte du Ponte déſignée par la lettre *a*, ſoit une fois dans les quatre cartes du Banquier, & que le Ponte ait mis ſur ſa carte une ſomme d'argent exprimée par *A*, on remarquera en conſiderant la Table précedente, qu'il y a douze arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, ſix qui le font perdre ou lui donnent 0, & ſix qui lui ſont indifferens.

Ceux qui le font gagner, ſont :

abcd	*bcad*
abdc	*bdac*
acbd	*cbad*
acdb	*cdab*
adbc	*dbac*
adcb	*dcab*

Ceux

Ceux qui le font perdre ſont :

bacd	*cabd*	*dabc*
badc	*cadb*	*dacb*

Ainſi exprimant le ſort cherché par la lettre s, on aura $s = \frac{12 \times 2A + 6 \times 0 + 6 \times A}{24} = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$.

2°. Si l'on ſuppoſe que la carte du Ponte ſe trouve deux fois entre les quatre cartes du Banquier, & que les deux lettres a & b expriment celle du Ponte, on trouvera que des vingt-quatre arrangemens de la Table, il y en a douze qui donnent $2A$ au Banquier :

acbd	*bcad*	*cdba*
acdb	*bcda*	*cdab*
adbc	*bdac*	*dcba*
adcb	*bdca*	*dcab*

Quatre qui lui donnent $\frac{1}{2}A$, c'eſt à dire, ſon écu & la moitié de celui du Ponte :

abcd	*bacd*
abdc	*badc*

Huit qui le font perdre :

cabd	*dabc*
cadb	*dacb*
cbad	*dbac*
cbda	*dbca*

Ainſi l'on aura $s = \frac{12 \times 2A + 4 \times \frac{1}{2}A + 8 \times 0}{24} = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$.

3°. Si l'on ſuppoſe que la carte du Ponte ſe trouve trois fois entre les quatre cartes du Banquier, & que les trois lettres, a, b, c, expriment celle du Ponte, on trouvera encore le ſort du Banquier $= A + \frac{1}{4}A$; car il y a douze arrangemens qui lui donnent $\frac{1}{2}A$.

abcd	*bacd*	*cabd*
abdc	*badc*	*cadb*
acbd	*bcad*	*cbad*
acdb	*bcda*	*cbda*

Six qui lui donnent $2A$:

adbc	*bdac*	*cdab*
adcb	*bdca*	*cdba*

Six qui le font perdre :

dabc	*dbac*	*dcba*
dacb	*dbca*	*dcab*

On aura donc $s = \frac{12 \times \frac{1}{2}A + 6 \times 2A + 6 \times 0}{24} = A + \frac{1}{4}A$.

4°. Enfin il eſt évident que ſi la carte du Ponte ſe trouvoit quatre fois dans les quatre cartes du Banquier, le ſort du Banquier ſeroit $= A + \frac{1}{2}A$.

COROLLAIRE I.

IL paroît par la ſolution de ce premier cas, que ſi la miſe du Ponte eſt un écu, il doit donner quinze ſols qui en eſt le quart au Banquier, pour acheter le droit de ſe retirer, ſoit que ſa carte ſoit une fois, ou deux fois, ou trois fois dans les quatre cartes du Banquier.

COROLLAIRE II.

CE ſeroit un travail infini de chercher les autres cas de la maniere qu'on a réſolu celui-ci en cherchant dans des Tables les arrangemens favorables & contraires; car ce nombre devient immenſe dans un plus grand nombre de cartes ; auſſi n'ai-je mis la ſolution précédente, que pour me faire plus facilement entendre dans la ſuite.

Pour réſoudre le cas précedent d'une maniere methodique, & pour en découvrir les hazards par la vûe de l'eſprit, il faut remarquer,

Que ſi la carte du Ponte étoit une fois dans deux cartes, le ſort du Banquier ſeroit $\frac{1}{2}A$: Car des deux arrangemens poſſibles de deux lettres il y en a un qui donne $2A$, & un qui lui donne A; & que la carte du Ponte y étant plus d'une fois, le ſort du Banquier ſeroit $2A$, ce qui eſt évident.

Il faut obſerver enſuite que la carte du Ponte étant une fois dans quatre cartes, ſi l'on place les vingt-quatre arrangemens poſſibles de quatre lettres ſur quatre colonnes, dont la premiere commence toute par a, la ſeconde par b, la troiſiéme par c, la quatriéme par d, la premiere colonne donnera $2A$ au Banquier dans tous ſes arrangemens.

Et que partageant chacune des trois autres colonnes en trois colonnes de deux arrangemens, l'une de ces trois dernieres, ſçavoir celle où a occupe la ſeconde place, donnera deux fois zero au Banquier, & chacune des deux autres dernieres donnera au Banquier le même ſort qu'il auroit dans le cas que le Banquier tenant deux cartes, celle du Ponte s'y trouvât une fois, c'eſt à dire $\frac{1}{2}A$, ce qui donne le ſort du Banquier, comme ci-devant $= \frac{1 \times 6 \times 2A + 3 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2}A}{24}$ $= \frac{30}{24}A = A + \frac{1}{4}A$.

On obſervera de même que la carte du Ponte exprimée par les lettres a & b étant deux fois dans quatre cartes, ſi l'on conçoit les vingt-quatre arrangemens differens que les quatre cartes peuvent recevoir, poſés ſur quatre colonnes, comme ci-devant, les deux colonnes qui commencent par les lettres a & b, contiendront chacune quatre arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier, & deux arrangemens qui lui donneront $\frac{1}{2}A$: Car dans l'une il y a deux arrangemens où a eſt ſuivie de b, & dans l'autre il y a deux arrangemens où b eſt ſuivie de a; & partageant chacune des deux autres colonnes de ſix arrangemens en trois autres de deux arrangemens, il y en aura deux de

ces trois qui donneront deux fois zero au Banquier, a & b y occupant la seconde place ; & la troisiéme donnera au Banquier le même sort qu'il auroit, si la carte du Ponte se trouvoit deux fois dans deux cartes ; & par conséquent on auroit encore selon cette idée le sort du Banquier,

$$= \frac{2 \times 4 \times 2A + 2 \times \frac{3}{2}A + 2 \times 2 \times 2A}{24} = A + \frac{1}{4}A.$$

On remarquera encore que la carte du Ponte exprimée par les lettres a, b, c, étant trois fois dans quatre cartes, les trois colonnes qui commencent par les lettres a, b, c, contiendront chacune deux arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier, & quatre arrangemens qui lui donneront $\frac{1}{2}A$, deux quelconques des trois lettres a, b, c, étant de suite ; & que partageant la derniere colonne qui commence par d en trois colonnes de deux arrangemens, chacune des trois donnera deux fois zero au Banquier, en sorte que son sort sera encore $3 \times \frac{2 \times 2A + 4 \times \frac{3}{2}A + 1 \times 0}{24}$ $= A + \frac{1}{4}A$.

Enfin il est évident que la carte du Ponte exprimée par les lettres a, b, c, étant quatre fois dans les quatre cartes, les quatre colonnes qui commencent par les lettres a, b, c, d, contiendront chacune six arrangemens qui donneront au Banquier $\frac{1}{2}A$, puisque tous ces differens arrangemens produiront necessairement un doublet ; d'où il suit que le sort du Banquier sera $A + \frac{1}{2}A$.

Tout cela est fondé sur l'ordre des arrangemens, & s'éclaircira par l'application que j'en ferai aux cas suivans.

COROLLAIRE III.

TEL nombre de cartes que tienne le Banquier, si celle du Ponte ne s'y trouve qu'une fois, le sort du Banquier sera exprimé par une fraction qui aura l'unité pour numerateur, & pour dénominateur le nombre des cartes que tient le Banquier : Car six cartes, par exemple, pouvant être rangées en 720 façons differentes, il est clair que si l'on conçoit tous ces arrangemens differens posés

ſur ſix colonnes de cent-vingt arrangemens chacune, en ſorte que dans la premiere la lettre a ſoit partout à la premiere place, que dans la ſeconde elle ſoit partout à la deuxiéme place, que dans la troiſiéme elle ſoit partout à la troiſiéme place, & ainſi de ſuite, la premiere, la troiſiéme, & la cinquiéme colonnes donneront $2A$ au Banquier dans tous leurs arrangemens; la ſeconde & la quatriéme lui donneront zero, & la cinquiéme lui donnera a.

On auroit donc $s = 3 \times \frac{120 \times 2A + 2 \times 120 \times 0 + 1 \times 120 \times A}{720} = \frac{840}{720}A = A + \frac{1}{6}A$.

Et generalement, ſi l'on nomme p le nombre des cartes du Banquier; m le nombre de tous les arrangemens poſſibles de ces cartes, on aura toujours le ſort du Banquier exprimé par cette formule $s = \frac{\frac{1}{2}p \times \frac{m}{p} \times 2A + \frac{m}{p} \times A}{m} = A + \frac{A}{p}$.

PROPOSITION III.

SECOND CAS.

L'on ſuppoſe que le Banquier tient ſix cartes, & que celle du Ponte y eſt un certain nombre de fois. On demande quel eſt le ſort du Banquier dans toutes les variations de ce ſecond cas.

1°. SOIT ſuppoſé que la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans les ſix cartes.

Si ces ſix cartes ſont repreſentées par les ſix lettres a, b, c, d, f, g, en ſorte que deux quelconques, par exemple, a & g expriment celle du Ponte.

On remarquera, 1°, qu'on peut mettre les ſept cens vingt arrangemens differens que ſix cartes peuvent recevoir ſur ſix colonnes, dont chacune ſera compoſée de ſix vingt rangs perpendiculaires, en ſorte que la premiere colonne commence toute par la lettre a, la ſeconde par la lettre b, la troiſiéme par la lettre c, & ainſi de ſuite.

2°. Que les deux colonnes qui commencent par a & par g, ont chacune quatre-vingt-ſeize rangs perpendiculaires, qui donnent au Banquier $2A$, & vingt-quatre qui lui donnent $\frac{3}{2}A$: Car chaque rang de ces deux colonnes

donne 2 *A* au Banquier à l'exception de ceux où *a* eſt ſuivie de *g* dans la premiere, & où *g* eſt ſuivie de *a* dans la derniere. Or cinq lettres pouvant recevoir 120 differens arrangemens, & chacune ſe trouvant neceſſairement un égal nombre de fois après *a* dans la premiere colonne, & aprés *g* dans la derniere, il eſt évident qu'il faut diviſer 120 par 4, pour avoir tous les doublets dans chacune des deux colonnes qui commencent ou par *a*, ou par *g*. Cette remarque eſt importante pour la ſolution de ce Problême, & il faut s'en ſouvenir dans la ſuite.

La plus grande difficulté, c'eſt de découvrir ce que donnent au Banquier les quatre autres colonnes. Pour le démêler, il faut remarquer d'abord que chacune de ces quatre colonnes donne un ſort égal au Banquier (ce qui eſt évident,) & qu'ainſi il ſuffit d'en examiner une. Soit la colonne qui commence par *b*, celle que l'on veut examiner; & pour plus de facilité, je la partage en cinq colonnes de vingt-quatre arrangemens chacune.

1	2	3	4	5
bacdfg	*bcadfg*	*bdacfg*	*bfacdg*	*bgacdf*
bacdgf	*bcadgf*	*bdacgf*	*bfacgd*	*bgacfd*
bacfdg	*bcafdg*	*bdafcg*	*bfadcg*	*bgadcf*
bacfgd	*bcafgd*	*bdafgc*	*bfadgc*	*bgadfc*
bacgdf	*bcagdf*	*bdagcf*	*bfagcd*	*bgafcd*
bacgfd	*bcagfd*	*bdagfc*	*bfagdc*	*bgafdc*
badcfg	*bcdafg*	*bdcafg*	*bfcadg*	*bgcadf*
badcgf	*bcdagf*	*bdcagf*	*bfcagd*	*bgcafd*
badfcg	*bcdfag*	*bdcfag*	*bfcdag*	*bgcdaf*
badfgc	*bcdfga*	*bdcfga*	*bfcdga*	*bgcdfa*
badgfc	*bcdgaf*	*bdcgaf*	*bfcgad*	*bgcfad*
badgcf	*bcdgfa*	*bdcgfa*	*bfcgda*	*bgcfda*
bafcdg	*bcfadg*	*bdfacg*	*bfdacg*	*bgdacf*
bafcgd	*bcfagd*	*bdfagc*	*bfdagc*	*bgdafc*
bafdcg	*bcfdag*	*bdfcag*	*bfdcag*	*bgdcaf*
bafdgc	*bcfdga*	*bdfcga*	*bfdcga*	*bgdcfa*
bafgdc	*bcfgad*	*bdfgac*	*bfdgac*	*bgdfac*
bafgcd	*bcfgda*	*bdfgca*	*bfdgca*	*bgdfca*
bagcdf	*bcgadf*	*bdgacf*	*bfgacd*	*bgfacd*
bagcfd	*bcgafd*	*bdgafc*	*bfgadc*	*bgfadc*
bagdcf	*bcgdaf*	*bdgcaf*	*bfgcad*	*bgfcad*
bagdfc	*bcgdfa*	*bdgcfa*	*bfgcda*	*bgfcda*
bagfcd	*bcgfad*	*bdgfac*	*bfgdac*	*bgfdac*
bagfdc	*bcgfda*	*bdgfca*	*bfgdca*	*bgfdca*

Il eſt aiſé de voir, en conſultant cette Table, que la premiere & la cinquiéme colonnes donnent zero au Banquier, puiſque dans la premiere la lettre a, & dans la cinquiéme la lettre b y tiennent la ſeconde place, & que chacune des trois autres colonnes contient douze arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, huit qui lui donnent zero, & quatre qui lui donnent $\frac{1}{2}A$, c'eſt à dire que chacune de ces trois colonnes donne les mêmes hazards qu'on a trouvés pour le Banquier dans le cas précedent, lorſqu'on a ſuppoſé qu'il tenoit quatre cartes, parmi leſquelles celle du Ponte ſe trouvoit deux fois, dont la raiſon eſt que les deux premieres lettres de la ſeconde, troiſiéme & quatriéme colonne de la Table ci-deſſus n'étant point celle du Ponte, il reſte quatre lettres, parmi leſquelles celle qui exprime la carte du Ponte ſe trouve deux fois : ce qui ſe réduit manifeſtement à l'article ſecond du cas précedent, où la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans quatre cartes.

Ainſi la colonne qui commence par la lettre b, donnera au Banquier $2 \times 24 \times 0 + 3 \times 8 \times 0 + 12 \times 2A + 4 \times \frac{1}{2}A = 90A$. Or les colonnes de 120 arrangemens qui commencent par c, par d, & par f, donnent la même valeur, & par conſequent pour avoir tous les coups favorables que donnent les quatres colonnes qui ne commencent ni par a, ni par g, il faut multiplier $90A$ par 4, ce qui fait $360A$; à quoi ajoutant $2 \times 96 \times 2A + 24 \times \frac{1}{2}A = 456A$ pour les coups favorables que donnent les colonnes qui commencent par a & par g, on aura $\frac{360A+456A}{720} = \frac{816}{720}A = A + \frac{2}{15}A$ pour le ſort du Banquier dans le cas propoſé.

COROLLAIRE.

TEL nombre de cartes que tienne le Banquier, ſi celle du Ponte s'y rencontre deux fois, pour trouver le ſort du Banquier, il faut concevoir tous les arrangemens poſſibles des cartes qu'il tient poſés ſur autant de colonnes, qu'il a de cartes; & remarquer enſuite que les

deux colonnes qui commencent par les lettres qui expriment la carte du Ponte, donnent chacune $2A$ au Banquier, à l'exception des rangs, où une des lettres qui exprime la carte du Ponte eſt ſuivie de l'autre, leſquels arrangemens donnent $\frac{1}{2}A$.

Pour trouver combien il y a de ces rangs dans chacune des deux colonnes, il faut diviſer tous les arrangemens qui les compoſent par le nombre des cartes moins un; l'expoſant de cette diviſion exprimera le nombre des arrangemens qui donnent $\frac{1}{2}A$ dans chacune de ces deux colonnes. Pour déterminer ce que donnent les autres colonnes, on les concevra chacune partagées en autant de de colonnes moins une qu'il y a de cartes; & obſervant un arrangement pareil à celui des deux Tables précedentes, on trouvera qu'il y a toujours deux de ces dernieres colonnes qui donnent zero au Banquier, les deux lettres qui expriment la carte du Ponte y occupant la ſeconde place; & que chacune des autres égales à celles-ci donnera au Banquier le même ſort qu'il avoit dans le cas précedent, c'eſt à dire dans le cas où le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, celle du Ponte y étoit deux fois.

C'eſt dans les remarques de ce Corollaire que conſiſte la ſolution du Problême, pour le cas où la carte du Ponte ſe trouve deux fois parmi les cartes du Banquier. J'aurois eu de la peine à bien faire entendre cette methode, ſans en faire l'application à des cas particuliers, & ſans me ſervir de la Table qui ſe trouve page 14.

2°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier, lorſqu'il tient ſix cartes parmi leſquelles celle du Ponte ſe trouve trois fois, on obſervera d'abord que des ſix colonnes qui expriment tous les arrangemens poſſibles de ces ſix cartes, les trois colonnes, dont la premiere lettre exprime la carte du Ponte, ont chacune ſoixante & douze arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, & quarante-huit qui lui donnent $\frac{1}{2}A$: Car les trois lettres qui expriment la carte du Ponte étant, par exemple, a, f, g, il y a dans la colonne qui commence par la lettre a vingt-quatre arrangemens

gemens, où a eſt ſuivi de f, & encore vingt-quatre, où a eſt ſuivi de g; il en eſt de même des colonnes qui commencent par f & par g.

Pour connoître ce que donnent les trois autres colonnes, on prendra garde que partageant une de ces trois colonnes de cent vingt rangs perpendiculaires en cinq autres de vingt-quatre chacune, par exemple, la colonne qui commence par b, ainſi qu'elle eſt repreſentée à la page 14, il y en a trois de ces cinq qui donnent zero au Banquier, ſçavoir celles où les lettres a, f & g ſont à la ſeconde place; & que chacune des deux autres colonnes contient douze arrangemens qui donnent $\frac{1}{2}A$ au Banquier, ſix qui lui donnent zero, & ſix qui lui donnent $2A$; c'eſt à dire que chacune de ces deux colonnes donne les mêmes hazards qu'on a trouvés pour le Banquier dans le cas précedent, lorſqu'on a ſuppoſé qu'il tenoit quatre cartes, parmi leſquelles celle du Ponte ſe trouvoit trois fois; dont la raiſon eſt que les deux premieres lettres de la ſeconde & de la troiſiéme colonne de la Table, pag. 14, n'étant point celle du Ponte, il reſte quatre lettres parmi leſquelles celle qui exprime la carte du Ponte y eſt trois fois, ce qui ſe réduit manifeſtement à l'article troiſiéme du cas précedent.

Cela poſé, les colonnes qui commencent par les lettres b, c, d, donneront $3 \times 2 \times 12 \times \frac{1}{2}A + 6 \times 2A = 180A$; à quoi ajoutant $3 \times 72 \times 2A + 48 \times \frac{1}{2}A = 648A$, pour ce que donnent les trois colonnes qui commencent par les lettres a, f, g, on aura $\frac{828}{720}A = A + \frac{1}{20}A$ pour la valeur qui exprime le ſort du Banquier dans le cas propoſé.

COROLLAIRE.

TEL nombre de cartes que tienne le Banquier, ſi celle du Ponte s'y rencontre trois fois, pour trouver le ſort du Banquier, il faut concevoir tous les arrangemens poſſibles des cartes que tient le Banquier poſés ſur autant de colonnes qu'il a de cartes, & remarquer enſuite

que les trois colonnes qui commencent par les lettres qui expriment la carte du Ponte, donnent chacune 2*A* au Banquier, à l'exception des arrangemens, où deux quelconques des trois lettres qui expriment la carte du Ponte ſe trouvent de ſuite à la premiere & à la ſeconde place; ces derniers lui donnent $\frac{1}{2}A$.

Pour trouver combien il y a de ces arrangemens dans chacune des trois colonnes, il faut diviſer tous les arrangemens qui les compoſent par le nombre des cartes moins un : L'expoſant de cette diviſion multiplié par deux exprimera le nombre des arrangemens qui donnent $\frac{1}{2}A$ dans chacune de ces trois colonnes.

Pour déterminer ce que donne chacune des trois autres colonnes, on les concevra chacune partagée en autant de colonnes moins un, qu'il y a de cartes; & obſervant un arrangement pareil à celui des deux Tables précedentes, on trouvera qu'il y a toujours trois de ces dernieres colonnes qui donnent zero au Banquier, les trois lettres qui expriment la carte du Ponte y occupant la ſeconde place; & que chacune des autres égales à celle-ci donnera au Banquier le même ſort qu'il avoit dans le cas précedent, où, le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, celle du Ponte y étoit deux fois.

3°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier, lorſqu'il tient ſix cartes, parmi leſquelles celle du Ponte ſe trouve quatre fois.

On remarquera qu'exprimant comme ci-devant les ſix cartes par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, dont quatre quelconques, par exemple, *a*, *d*, *f*, *g*, déſignent celle du Ponte, ſi l'on diſtribue les ſept cens vingt arrangemens poſſibles de ces ſix cartes ſur ſix colonnes, dont la premiere commence toute par la lettre *a*, la ſeconde par la lettre *b*, &c. comme il a été dit ci-devant, les quatre colonnes, dont la premiere lettre exprime la carte du Ponte, contiendront chacune 48 arrangemens qui donnent 2*A* au Banquier, & ſoixante & douze qui lui donnent $\frac{1}{2}A$. Car des quatre lettres qui expriment la carte du Ponte, il y en a trois qui ſuivent la lettre *a* dans la premiere colonne, & il en eſt

de même des autres colonnes qui commencent par les lettres d, f, g.

Pour connoître ce que donnent les deux autres colonnes, il faut observer que partageant une de ces deux colonnes de cent vingt rangs perpendiculaires en cinq autres de vingt-quatre chacune, par exemple, la colonne qui commence par b, ainsi qu'elle est representée dans la Table page 14; il y en a quatre de ces cinq qui donnent zero au Banquier, sçavoir, celles où les lettres a, d, f, g, sont à la seconde place, & que l'autre contient vingt-quatre arrangemens, qui donnent au Banquier $\frac{1}{2}a$; la raison en est évidente.

Cela posé, les colonnes qui commencent par les lettres a, d, f, g, donneront toutes ensemble $4 \times \overline{48 \times 2A + 72 \times \frac{1}{2}A}$, à quoi ajoutant $+ 2 \times \overline{1 \times 24 \times \frac{1}{2}A}$, pour ce que donnent les deux colonnes qui commencent par les lettres b & c, on aura $\frac{888}{720}A = A + \frac{7}{10}A$, pour la valeur qui exprime le sort du Banquier dans le cas proposé.

COROLLAIRE.

TEL nombre de cartes que tienne le Banquier, si celle du Ponte s'y rencontre quatre fois, pour trouver le sort du Banquier, il faut concevoir tous les arrangemens possibles des cartes qu'il tient posés sur autant de colonnes qu'il a de cartes, & remarquer que les quatre colonnes qui commencent par les lettres qui expriment la carte du Ponte, donnent chacune $2A$ au Banquier, à l'exception des rangs, où deux quelconques des quatre lettres qui expriment la carte du Ponte se trouvent de suite à la premiere & à la seconde place; ces derniers lui donnent $\frac{1}{2}A$.

Pour trouver combien il y a de ces arrangemens dans chacune des quatre colonnes, il faut diviser tous les arrangemens qui les composent par le nombre des cartes moins un. L'exposant de cette division multiplié par trois exprimera le nombre des arrangemens qui don-

donnent $\frac{1}{2}A$ dans chacune de ces quatre colonnes.

Pour déterminer ce que donne chacune des deux autres colonnes, on les concevra chacune partagée en autant de colonnes moins une qu'il y a de cartes; & obſervant un arrangement pareil à celui des deux Tables pag. 8 & 14, on trouvera qu'il y a toujours quatre de ces dernieres colonnes qui donnent zero au Banquier, les quatre lettres qui expriment la carte du Ponte y occupant la ſeconde place, & que chacune des autres égales à celles-ci donnera au Banquier le même ſort qu'on a trouvé pour le Banquier dans le cas, où le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, celle du Ponte y étoit quatre fois.

PROPOSITION III.

TROISIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il reſte huit cartes dans la main du Banquier, & que dans ces huit cartes celle du Ponte y eſt deux fois; on demande quel eſt dans ce cas l'avantage du Banquier.

1°. SOIENT repreſentées les huit cartes du Banquier par les huit lettres a, b, c, d, f, g, h, k; ſoit auſſi déſignée celle du Ponte par les deux quelconques a & b.

On ſçait par ce qui a été dit dans la ſolution du premier cas pag. 7 & 8, que huit cartes peuvent être arrangées en quarante mil trois cens vingt façons differentes: Si donc on place tous ces arrangemens differens ſur huit colonnes, qui en contiennent chacune cinq mil quarante, en ſorte que tous les arrangemens de la premiere colonne commencent par la lettre a, tous les arrangemens de la ſeconde par la lettre b, & ainſi de ſuite.

On remarquera que les deux premieres colonnes contiennent chacune quatre mil trois cens vingt arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, & ſept cens vingt arrangemens qui lui donnent $\frac{1}{2}A$.

Pour déterminer ce que donnent chacune des six autres colonnes, on les subdivisera en sept autres composées chacune de sept cens vingt arrangemens selon l'ordre de la Table pag. 14, & on observera que de ces sept colonnes il y en a deux qui donnent zero, sçavoir celles où *a* & *b* sont à la seconde place, & que les cinq autres contiennent chacune deux cens quatre-vingt huit arrangemens qui donnent zero au Banquier, trois cens trente-six qui lui donnent $2A$, & quatre-vingt seize qui lui donnent $\frac{1}{2}A$; c'est à dire que chacune de ces cinq colonnes donne au Banquier le même sort qu'on a trouvé, lorsque dans six cartes celle du Ponte s'y trouvoit deux fois: D'où il faut conclure que chacune des six colonnes, qui ne commencent ni par *a* ni par *b*, donnera au Banquier $4080A$, & par consequent les six ensemble donneront $24480A$. Ajoutant donc à cette valeur celle que donnent les deux colonnes dont les arrangemens commencent par *a* & par *b*, on aura $\frac{24480A \times 19440A}{40320} = \frac{4392}{4032}A = A + \frac{5}{56}A$ pour la valeur qui exprime le sort du Banquier dans le cas proposé.

2°. On trouvera de la même maniere que le sort du Banquier, lorsque dans ses huit cartes celle du Ponte s'y trouve trois fois, est $= \frac{3 \times 3600 \times 2A + 1440 \times \frac{3}{2}A}{40320} + \frac{5 \times 828 \times 4 \times A}{40320} = \frac{44640}{40320}A = A + \frac{3}{28}A$

3°. On trouvera pareillement que le sort du Banquier, lorsque dans ses huit cartes celle du Ponte s'y trouve quatre fois, est $= \frac{4 \times 2880 \times 2A + 2160 \times \frac{3}{2}A}{40320} + \frac{4 \times 888 \times 3A}{40320} = \frac{46656}{40320}A = A + \frac{11}{70}A$.

GENERALEMENT.

Tel nombre de cartes que tienne le Banquier, & tel nombre de fois que la carte du Ponte soit parmi celles du Banquier, on trouvera toujours son sort en cette sorte. 1°. On cherchera par la methode de la page 8 le nombre

de tous les differens arrangemens poſſibles des cartes du Banquier. 2°. On ſe repreſentera ces cartes par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, &c. & on ſuppoſera que certaines à volonté déſignent celle du Ponte. 3°. On concevra tous ces arrangemens differens diſtribués ſur autant de colonnes qu'il y aura de cartes; en ſorte que la premiere commence toute par la lettre *a*, la ſeconde par la lettre *b*, la troiſiéme par la lettre *c*, &c. 4°. On remarquera que les colonnes qui commencent par les lettres qui déſignent la carte du Ponte, donnent 2*A* au Banquier dans tous leurs arrangemens, à l'exception de ceux ou deux quelconques d'entre les lettres qui expriment la carte du Ponte, ſe trouvent de ſuite à la premiere & à la ſeconde place; ceux-ci donneront $\frac{1}{2}A$.

Pour trouver le nombre de ces arrangemens dans chacune de ces colonnes, on diviſera le nombre des arrangemens dont eſt compoſée chaque colonne par le nombre des cartes du Banquier moins un, & on multipliera l'expoſant par le nombre de fois moins un que la carte du Ponte ſe trouve dans celles du Banquier; ce produit donnera tous les arrangemens de ces colonnes, qui donnent $\frac{1}{2}A$.

A l'égard des autres colonnes qui commencent par des lettres differentes de celles qui expriment la carte du Ponte, il faut, pour y découvrir les arrangemens favorables, les concevoir chacune partagée & ſubdiviſée en autant de colonnes moins une qu'il y a de cartes, & avoir égard à l'ordre marqué dans les Tables des pages 8 & 14; obſerver que de ces dernieres colonnes il y en a toujours autant qui donnent zero au Banquier, que la carte du Ponte ſe trouve de fois dans celles du Banquier; & que chacune des autres petites colonnes donne au Banquier le même ſort qu'on a trouvé dans le cas qui a précedé; c'eſt à dire, dans le cas, où le nombre des cartes du Banquier étant moindre de deux, la carte du Ponte s'y trouve un égal nombre de fois.

Ainſi, l'on trouvera entre tous les differens arrangemens poſſibles des cartes que tient le Banquier, quels ſont ceux qui lui donnent ou *A*, ou 2*A*, ou $\frac{3}{2}A$, ou zero; &

par conſequent on aura par cette methode le ſort du Banquier dans tous les cas poſſibles ; ce qu'il falloit trouver.

En ſuivant l'idée de cette démonſtration, ſi l'on nomme p le nombre des cartes que tient le Banquier, q le nombre de fois que la carte du Ponte eſt dans celles du Banquier, g le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p-2$, S le ſort cherché ; on aura le ſort du Banquier exprimé par cette formule

$$S = \frac{\overline{pq-qq} \times 2A + \overline{qq-q} \times \frac{1}{2}A + g \times \overline{p-q} \times \overline{p-q-1}}{p \times \overline{p-1}}$$

On peut trouver par cette formule le ſort du Banquier, quelque nombre de cartes qu'il ait entre les mains, & quelque nombre de fois que la carte du Ponte y ſoit compriſe. Mais cette formule a cet inconvenient fort grand de ne donner l'avantage du Banquier pour un certain nombre de cartes deſigné par p, que lorſqu'on ſçait déja ſon avantage pour un nombre de cartes qui ſoit $p-2$. Ainſi cette formule ne peut être utile que pour trouver tous les differens cas les uns après les autres, en commençant par les plus ſimples. En voici une autre beaucoup plus recherchée, & infiniment plus étendue, qui donne ſans beaucoup de calcul tous les differens cas en general, & chaque cas en particulier indépendamment les uns des autres.

L'avantage du Banquier peut être exprimé par une fraction qu'on déterminera par la regle qui ſuit. Le dénominateur contiendra autant de produits des quantités p, $p-1$, $p-2$, &c. qu'il y a d'unités dans q. Pour avoir le numerateur il faudra prendre dans la Table des combinaiſons page 80, un rang horizontal, dont le quantiéme ſoit $q-1$, ajouter en une ſomme tous les termes de ce rang qui ſont en nombre impair, à commencer par celui qui correſpond à $p-2$ dans le rang des nombres naturels, c'eſt à dire le premier, le troiſiéme, le cinquiéme, &c. juſqu'à zero ; multiplier cette ſomme par autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qu'il y a d'unités dans q, & la multiplier encore par $\frac{1}{2}A$, avec cette ſeule exception que q étant 2, il faut multiplier le

dernier terme de la ſuite par A, & non par $\frac{1}{2}A$. Cette regle s'éclaircira par un Exemple.

Soit $q = 6$, & $p = 14$, il faut ajouter les termes de la cinquiéme bande horizontale, à commencer par 495 qui correſpond à $12 = p - 2$, ces termes ſont $495 + 210 + 70 + 15 + 1$, dont la ſomme étant multipliée par 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. multipliée encore par $\frac{1}{2}A$, & diviſée par 14, 13, 12, 11, 10, 9, eſt $\frac{791}{6006}A$.

Pour reduire cette regle à des formules qui déterminent tout d'un coup, en ſubſtituant pour p ſa valeur, l'avantage du Banquier pour quelque nombre de cartes que ce ſoit, lorſque la carte du Ponte s'y trouve un certain nombre de fois exprimé par q; il ſuffira dans le cas de $q = 3$, de trouver la ſomme d'une progreſſion arithmetique; ainſi les trois premiers cas où $q = 1 = 2 = 3$, n'ont nulle difficulté. A l'égard des autres, on a beſoin de la ſolution generale du Problême qui ſuit : *Trouver la ſomme d'une progreſſion dont chaque terme ſoit formé d'autant de produits de quantités qui décroiſſent de l'unité, qu'il y a d'unités dans* $q - 2$.

Ainſi q étant 4, il s'agit de trouver la ſomme d'une progreſſion dont le premier terme ſoit $p - 2 \times p - 3 + p - 4 \times p - 5 + p - 6 \times p - 7$ &c. Si $q = 5$, il faut trouver la ſomme de cette progreſſion $p - 2 \times p - 3 \times p - 4 + p - 4 \times p - 5 \times p - 6 + p - 6 \times p - 7 \times p - 8 +$ &c. Si $q = 6$, il faut trouver la ſomme de cette progreſſion $p - 2 \times p - 3 \times p - 4 \times p - 5 + p - 4 \times p - 5 \times p - 6 \times p - 7 + p - 6 \times p - 7 \times p - 8 \times p - 9 +$ &c. & ainſi de ſuite par raport aux differentes valeurs de q.

Comme la methode qui ſert à trouver la ſomme de ces ſuites eſt aſſez ſinguliere, & peut paroître avoir quelque difficulté, j'aurois ſouhaité l'expliquer ici; mais comme elle ſuppoſe ce qui eſt demontré depuis la page 80 juſqu'à la page 100, je me contenterai en donnant les formules ſuivantes, $B = \frac{1}{p}A$, $C = \frac{p+2}{2 \times pp - p}A$, $D = \frac{3}{4 \times p - 2}A$,

$E = \frac{4}{2pp-8p+6}A$, $F = \frac{5}{4\times pp-4p+3}A$, $G = \frac{6}{p^3-9pp+23p-15}\times\frac{3}{4}A$,

$H = \frac{7}{8}\times\frac{2pp-12p+13}{p^3-9pp+23p-15}A$, $K = \frac{8}{p^4-16p^3+86pp-176p+105}\times\frac{1}{2}A$,

$L = \frac{9}{}$, &c. de faire obſerver une propriété fort ſinguliere des nombres figurés, qui m'a ſervi de fondement pour trouver les ſommes des ſuites précedentes. Cette propriété conſiſte en ce que rangeant ces nombres en triangle comme à la page 80, ſi l'on nomme un nombre naturel quelconque pair p, la ſomme des nombres d'un rang quelconque horizontal qui répondent à des nombres naturels impairs, ſera égale à l'excès des nombres qui dans le rang ſuivant répondent à des nombres naturels pairs, à commencer par p ſur les nombres de ce dernier rang qui répondent à des nombres naturels impairs.

La premiere de ces formules exprime l'avantage du Banquier quand la carte du Ponte ſe trouve une fois dans ſa main, la ſeconde exprime ſon avantage lorſqu'elle s'y trouve deux fois, la troiſiéme exprime ſon avantage lorſqu'elle s'y trouve trois fois, & ainſi de ſuite.

J'ai dreſſé deux Tables ſur les quatre premieres formules, dans le deſſein de faire plaiſir aux Joueurs, & de ſatisfaire leur curioſité. Pour en connoître l'uſage il faut ſçavoir que dans la premiere le chifre renfermé dans la cellule □ exprime le nombre des cartes que tient le Banquier, & que le nombre qui ſuit ou la cellule dans la premiere colonne, ou deux points dans les autres colonnes, exprime le nombre de fois que la carte du Ponte eſt ſuppoſée ſe trouver dans la main du Banquier. L'uſage de la ſeconde Table eſt de donner des expreſſions à la verité moins exactes, mais plus ſimples & plus intelligibles aux Joueurs, des fractions qui dans la premiere deſignent avec preciſion l'avantage du Banquier. Il faut ſçavoir pour entendre cette Table, que cette marque $>$ ſignifie excès, & cette autre $<$ défaut, en ſorte que j'entens par $>\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$ une quantité plus grande que $\frac{1}{4}$, & plus petite que $\frac{1}{3}$.

On peut faire par raport aux nombres de la premiere Table, pluſieurs obſervations aſſez curieuſes. Voici les principales.

COROLLAIRE I.

DANS la premiere Table l'avantage du Banquier eſt exprimé dans la premiere colonne par une fraction dont le numerateur étant toujours l'unité, le dénominateur eſt le nombre des cartes que tient le Banquier.

Dans la ſeconde colonne cet avantage eſt exprimé par une fraction dont le numerateur étant ſelon la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. le dénominateur a pour difference entre ſes termes les nombres 18, 26, 34, 42, 50, 58, dont la difference eſt 8.

Dans la troiſiéme colonne le numerateur étant toujours 3, la difference qui regne dans le dénominateur eſt 8.

Dans la quatriéme colonne la difference étant toujours 4 dans le numerateur, le dénominateur a pour difference entre ſes termes les nombres 24, 40, 56, 72, 88, &c. dont la difference eſt 16.

On peut encore obſerver une autre uniformité aſſez ſinguliere entre les derniers chiffres du dénominateur de chaque terme d'une colonne.

Dans la premiere les derniers chiffres du dénominateur ſont ſelon cet ordre 4, 6, 8, 0, 2 | 4, 6, 8, 0, 2 | &c. Dans la ſeconde ils ſont ſelon cet ordre 2, 0, 6, 0, 2 | 2, 0, 6, 0, 2 | &c. Dans la troiſiéme ils ſont ſelon cet ordre 2, 0, 8, 6, 4 | 2, 0, 8, 6, 4 | &c. Dans la quatriéme ils ſont ſelon cet ordre 6, 0, 0, 6, 8 | 6, 0, 0, 6, 8 | &c. On recherchera avec plaiſir la cauſe de cette uniformité.

COROLLAIRE II.

ON pourra par le moyen de ces Tables trouver tout d'un coup combien un Banquier a d'avantage ſur chaque carte. On pourra pareillement ſçavoir combien chaque taille complette aura dû, à fortune égale, apporter de profit au Banquier, ſi l'on ſe ſouvient du nombre de cartes qui ont été priſes par les Pontes, des diverſes circonſtances dans leſquelles on les a miſes au jeu, & enfin de la quantité d'argent qu'on a hazardé deſſus. On trouvera apparemment que cet avantage eſt trop conſiderable. On lui donneroit de juſtes bornes en établiſſant que les doublets fuſſent indifferens pour le Banquier & pour le

Ponte, ou du moins qu'ils valuſſent ſeulement le tiers ou le quart de la miſe du Ponte. Ainſi ce qui reſteroit d'avantage au Banquier, ſeroit ſuffiſant pour faire préferer aux Joueurs qui entendent leur intereſt, la place de Banquier à celle de Ponte; & ne ſeroit pas aſſés conſiderable, pour que les Pontes en ſouffriſſent beaucoup de préjudice.

COROLLAIRE III.

AFIN que le Ponte prenant une carte ait le moins de deſavantage qu'il eſt poſſible, il faut qu'il en choiſiſſe une qui ait paſſé deux fois; car il y auroit plus de deſavantage pour lui, s'il prenoit une carte qui eût paſſé une fois, & plus de deſavantage encore, s'il prenoit une carte qui eût paſſé trois fois; & enfin le plus mauvais choix que puiſſe faire un Ponte, c'eſt de prendre une carte qui n'ait point encore paſſé.

Ainſi l'on trouvera, par exemple, que ſuppoſant *A* égal à une piſtolle, l'avantage du Banquier qui ſeroit dix-neuf ſols deux deniers, dans la ſuppoſition que la carte du Ponte fût quatre fois dans douze cartes; & ſeize ſols huit deniers, dans la ſuppoſition qu'elle y fût une fois, n'eſt plus que treize ſols ſept deniers, lorſque dans ces douze cartes celle du Ponte s'y trouve trois fois, & dix ſols ſept deniers, lorſqu'elle n'y eſt que deux fois.

On remarquera la même choſe par rapport à tout autre nombre de cartes.

REMARQUE I.

LEs perſonnes qui n'ont point examiné à fond le Jeu du Pharaon & de la Baſſette, pourroient trouver à redire, que je ne parlaſſe point des maſſes, des parolis, de la paix, des ſept & le *va*, &c. car la plûpart des Joueurs s'imaginent qu'il y a en tout cela bien du myſtere. J'en ai connu qui croyoient avoir de bonnes raiſons pour préferer de mettre quatre Louis ſur une carte ſimple à faire le paroli de deux Louis, ou le ſept & le *va* d'un Louis.

J'en ai vû d'autres qui s'étoient persuadés qu'il étoit très avantageux de faire souvent des paix: neanmoins il est évident que, puisque le Ponte a la liberté de prendre à chaque fois qu'il perd ou qu'il gagne une nouvelle carte telle qu'il lui plaît, il ne doit point s'embaraſſer ſi c'eſt ou un ſept & le *va*, ou un paroli, ou une paix, ou une double paix, &c. Car faire le paroli d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre deux Louis ſur une carte, après avoir gagné un Louis; & faire le ſept & le *va* d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre quatre Louis ſur une carte, après en avoir gagné trois: & de même, faire la paix d'un Louis n'eſt autre choſe que de mettre un Louis ſur une carte, après avoir gagné un Louis ſur cette même carte.

L'on n'a apparemment inventé les parolis, les ſept & le *va*, &c. que pour épargner au Banquier la peine de payer ceux qui ont deſſein de mettre ſur leurs cartes le double de ce qu'ils viennent de gagner: neanmoins il ſeroit plus utile aux Banquiers de prendre ce ſoin, que d'être expoſés, comme ils le ſont, à ce qu'on nomme Alpiou de Campagne.

Pour moi, je crois que ſi les Banquiers n'ont point aboli l'uſage de faire ces cornes dont le grand nombre cauſe dans le Jeu une confuſion qui eſt ſouvent préjudiciable au Banquier, & qui favoriſe les tromperies des Pontes, c'eſt que les Banquiers ont bien vû que la plûpart des hommes ne jugeant point des choſes par raiſon, tel Ponte qui feroit ſans peine le ſept & le *va* d'un Louis, croyant ne hazarder qu'un Louis, ne pourroit ſe réſoudre à mettre quatre Louis ſur une carte ſimple. Outre que pour l'ordinaire c'eſt dans les dernieres cartes, lorſque l'avantage du Banquier eſt le plus conſiderable, que les Pontes ſe picquent & font les parolis, les ſept & le *va*, &c. ce qui les dédommage avec uſure des tromperies auſquelles ils ſont par là expoſés, mais dont il n'eſt pas d'ailleurs impoſſible de ſe garantir avec beaucoup d'application, & avec l'aide d'un croupier.

TABLE POUR LE PHARAON

52	: = * * *	: 2 = * * *	: 3 = * * *	: 4 = $a + \frac{99}{4998}a$
50	1 = * * *	: 2 = $a + \frac{26}{2450}a$	: 3 = $a + \frac{3}{196}a$	: 4 = $a + \frac{95}{4606}a$
48	1 = $a + \frac{1}{48}a$	: 2 = $a + \frac{25}{2256}a$	: 3 = $a + \frac{3}{188}a$	: 4 = $a + \frac{91}{4230}a$
46	1 = $a + \frac{1}{46}a$	: 2 = $a + \frac{24}{2070}a$	: 3 = $a + \frac{3}{180}a$	: 4 = $a + \frac{87}{3870}a$
44	1 = $a + \frac{1}{44}a$	: 2 = $a + \frac{23}{1892}a$	: 3 = $a + \frac{3}{172}a$	: 4 = $a + \frac{83}{3526}a$
42	1 = $a + \frac{1}{42}a$	: 2 = $a + \frac{22}{1722}a$	: 3 = $a + \frac{3}{164}a$	: 4 = $a + \frac{79}{3198}a$
40	1 = $a + \frac{1}{40}a$	: 2 = $a + \frac{21}{1560}a$	: 3 = $a + \frac{3}{156}a$	: 4 = $a + \frac{75}{2886}a$
38	1 = $a + \frac{1}{38}a$	: 2 = $a + \frac{20}{1406}a$	: 3 = $a + \frac{3}{148}a$	: 4 = $a + \frac{71}{2590}a$
36	1 = $a + \frac{1}{36}a$	: 2 = $a + \frac{19}{1260}a$	: 3 = $a + \frac{3}{140}a$	: 4 = $a + \frac{67}{2310}a$
34	1 = $a + \frac{1}{34}a$	: 2 = $a + \frac{18}{1122}a$	: 3 = $a + \frac{3}{132}a$	: 4 = $a + \frac{63}{2046}a$
32	1 = $a + \frac{1}{32}a$	: 2 = $a + \frac{17}{992}a$	: 3 = $a + \frac{3}{124}a$	: 4 = $a + \frac{59}{1798}a$
30	1 = $a + \frac{1}{30}a$	: 2 = $a + \frac{16}{870}a$	: 3 = $a + \frac{3}{116}a$	: 4 = $a + \frac{55}{1566}a$
28	1 = $a + \frac{1}{28}a$	: 2 = $a + \frac{15}{756}a$	: 3 = $a + \frac{3}{108}a$	: 4 = $a + \frac{51}{1350}a$
26	1 = $a + \frac{1}{26}a$	: 2 = $a + \frac{14}{650}a$	: 3 = $a + \frac{3}{100}a$	: 4 = $a + \frac{47}{1150}a$
24	1 = $a + \frac{1}{24}a$	: 2 = $a + \frac{13}{552}a$	: 3 = $a + \frac{3}{92}a$	: 4 = $a + \frac{43}{966}a$
22	1 = $a + \frac{1}{22}a$	: 2 = $a + \frac{12}{462}a$	: 3 = $a + \frac{3}{84}a$	: 4 = $a + \frac{39}{798}a$
20	1 = $a + \frac{1}{20}a$	: 2 = $a + \frac{11}{380}a$	: 3 = $a + \frac{3}{76}a$	: 4 = $a + \frac{35}{646}a$
18	1 = $a + \frac{1}{18}a$	: 2 = $a + \frac{10}{306}a$	: 3 = $a + \frac{3}{68}a$	: 4 = $a + \frac{31}{510}a$
16	1 = $a + \frac{1}{16}a$	: 2 = $a + \frac{9}{240}a$	: 3 = $a + \frac{3}{60}a$	: 4 = $a + \frac{27}{390}a$
14	1 = $a + \frac{1}{14}a$	: 2 = $a + \frac{8}{182}a$	: 3 = $a + \frac{3}{52}a$	: 4 = $a + \frac{23}{286}a$
12	1 = $a + \frac{1}{12}a$	: 2 = $a + \frac{7}{132}a$	: 3 = $a + \frac{3}{44}a$	: 4 = $a + \frac{19}{198}a$
10	1 = $a + \frac{1}{10}a$	: 2 = $a + \frac{6}{90}a$	: 3 = $a + \frac{3}{36}a$	: 4 = $a + \frac{15}{126}a$
8	1 = $a + \frac{1}{8}a$	: 2 = $a + \frac{5}{56}a$	: 3 = $a + \frac{3}{28}a$	: 4 = $a + \frac{11}{70}a$
6	1 = $a + \frac{1}{6}a$	: 2 = $a + \frac{4}{30}a$	: 3 = $a + \frac{3}{20}a$	: 4 = $a + \frac{7}{30}a$
4	1 = $a + \frac{1}{4}a$	: 2 = $a + \frac{3}{12}a$	: 3 = $a + \frac{3}{12}a$	: 4 = $a + \frac{3}{6}a$

TABLE II. POUR LE PHARAON.

52 $1 = * * *$	$:2 = * * *$	$:3 = * * *$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{51} \langle \frac{1}{50}$
50 $1 = * * *$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{95} \langle \frac{1}{94}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{66} \langle \frac{1}{65}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{49} \langle \frac{1}{48}$
48 $1 = a + \frac{1}{48} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{91} \langle \frac{1}{90}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{63} \langle \frac{1}{62}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{47} \langle \frac{1}{46}$
46 $1 = a + \frac{1}{46} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{87} \langle \frac{1}{86}$	$:3 = a + \frac{1}{60}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{45} \langle \frac{1}{44}$
44 $1 = a + \frac{1}{44} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{83} \langle \frac{1}{82}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{58} \langle \frac{1}{57}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{43} \langle \frac{1}{42}$
42 $1 = a + \frac{1}{42} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{79} \langle \frac{1}{78}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{55} \langle \frac{1}{54}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{41} \langle \frac{1}{40}$
40 $1 = a + \frac{1}{40} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{75} \langle \frac{1}{74}$	$:3 = a + \frac{1}{52}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{39} \langle \frac{1}{38}$
38 $1 = a + \frac{1}{38} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{71} \langle \frac{1}{70}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{50} \langle \frac{1}{49}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{37} \langle \frac{1}{36}$
36 $1 = a + \frac{1}{36} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{67} \langle \frac{1}{66}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{47} \langle \frac{1}{46}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{35} \langle \frac{1}{34}$
34 $1 = a + \frac{1}{34} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{63} \langle \frac{1}{62}$	$:3 = a + \frac{1}{44}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{33} \langle \frac{1}{32}$
32 $1 = a + \frac{1}{32} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{59} \langle \frac{1}{58}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{42} \langle \frac{1}{41}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{31} \langle \frac{1}{30}$
30 $1 = a + \frac{1}{30} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{55} \langle \frac{1}{54}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{39} \langle \frac{1}{48}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{29} \langle \frac{1}{28}$
28 $1 = a + \frac{1}{28} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{51} \langle \frac{1}{50}$	$:3 = a + \frac{1}{36}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{27} \langle \frac{1}{26}$
26 $1 = a + \frac{1}{26} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{47} \langle \frac{1}{46}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{34} \langle \frac{1}{33}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{25} \langle \frac{1}{24}$
24 $1 = a + \frac{1}{24} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{43} \langle \frac{1}{42}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{31} \langle \frac{1}{30}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{23} \langle \frac{1}{22}$
22 $1 = a + \frac{1}{22} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{39} \langle \frac{1}{38}$	$:3 = a + \frac{1}{28}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{21} \langle \frac{1}{20}$
20 $1 = a + \frac{1}{20} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{35} \langle \frac{1}{34}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{26} \langle \frac{1}{25}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{19} \langle \frac{1}{18}$
18 $1 = a + \frac{1}{18} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{31} \langle \frac{1}{30}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{23} \langle \frac{1}{22}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{17} \langle \frac{1}{16}$
16 $1 = a + \frac{1}{16} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{27} \langle \frac{1}{26}$	$:3 = a + \frac{1}{20}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{15} \langle \frac{1}{14}$
14 $1 = a + \frac{1}{14} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{23} \langle \frac{1}{22}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{18} \langle \frac{1}{17}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{13} \langle \frac{1}{12}$
12 $1 = a + \frac{1}{12} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{19} \langle \frac{1}{18}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{15} \langle \frac{1}{14}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{11} \langle \frac{1}{10}$
10 $1 = a + \frac{1}{10} a$	$:2 = a + \frac{1}{15}$	$:3 = a + \frac{1}{12}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{9} \langle \frac{1}{8}$
8 $1 = a + \frac{1}{8} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{12} \langle \frac{1}{11}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{10} \langle \frac{1}{9}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{7} \langle \frac{1}{6}$
6 $1 = a + \frac{1}{6} a$	$:2 = a + \rangle \frac{1}{8} \langle \frac{1}{7}$	$:3 = a + \rangle \frac{1}{7} \langle \frac{1}{6}$	$:4 = a + \rangle \frac{1}{5} \langle \frac{1}{4}$
4 $1 = a + \frac{1}{4} a$	$:2 = a + \frac{1}{4}$	$:3 = a + \frac{1}{4} a$	$:4 = a + \frac{1}{2} a$

REMARQUE II.

IL étoit facile aux Joueurs de s'appercevoir que l'avantage du Banquier augmente à proportion que le nombre de ſes cartes diminue, mais il étoit impoſſible de découvrir ſans Analyſe la loi de cette diminution, &, ce qui eſt le plus important, de ſçavoir comment cet avantage varie ſelon que la carte du Ponte ſe trouve plus ou moins de fois dans la main du Banquier. Les Joueurs n'euſſent aſſurément jamais pu imaginer que l'avantage du Banquier par raport à une carte qui n'a point paſſé, eſt preſque double de celui qu'il a ſur une carte qui a paſſé deux fois, & beaucoup moins encore que ſon avantage par raport à une carte qui a paſſé trois fois, eſt à ſon avantage par raport à une carte qui a paſſé deux fois dans un plus grand raport que de trois à deux. Les Joueurs trouveront tout cela ſans peine, & peut-être avec quelque ſurpriſe dans les Tables ci jointes; ils y verront, par exemple, que l'avantage du Banquier qui ne ſeroit qu'environ vingt-quatre ſols ſi le Ponte mettoit ſix piſtolles ou à la premiere taille du jeu, ou ſur une carte qui auroit paſſé deux fois lorſqu'il n'en reſteroit plus que vingt-huit dans la main du Banquier (ces deux cas reviennent à peu près à la même choſe) ſera 7 liv. 2 ſ. ſi le Ponte met ſix piſtolles ſur une carte qui n'ait point encore paſſé, le talon n'étant plus compoſé que de dix cartes, & que ſon avantage ſeroit preciſément de 6 livres ſi la carte du Ponte avoit dans ce dernier cas paſſé trois fois. Ainſi toute la ſcience de ce Jeu ſe reduit pour les Pontes à obſerver les deux regles qui ſuivent.

1°. Ne prendre des cartes que dans les premieres tailles, & hazarder ſur le jeu d'autant moins qu'il y a un plus grand nombre de tailles paſſées.

2°. Regarder comme les plus mauvaiſes cartes celles qui n'ont point encore paſſé, ou qui ont paſſé trois fois, & préferer à toutes, celles qui ont paſſé deux fois.

En ſuivant ces deux regles, le deſavantage du Ponte ſera le moindre qu'il ſera poſſible.

PROBLÉME SUR LE JEU DU LANSQUENET.

Déterminer generalement l'avantage de celui qui a la main, & le ſort des autres coupeurs par raport aux differentes places qu'ils occupent.

ON nomme coupeurs ceux qui prennent carte dans le tour, avant que celui qui a la main ſe donne la ſienne ; & carabineurs, ceux qui prennent carte, après que celle de celui qui a la main eſt tirée. On appelle la réjouiſſance la carte qui vient immédiatement après la carte de celui qui a la main. Tout le monde y peut mettre avant que la carte de celui qui a la main ſoit tirée ; mais il dépend de lui de tenir ce qu'il veut, pourvû qu'il s'en explique avant que de tirer ſa carte : car s'il la tire ſans rien dire, il eſt obligé de tenir tout ce qu'on y a mis.

Après qu'on a reglé le fond du jeu, celui qui a la main donne des cartes aux coupeurs à commencer par ſa droite, & ces cartes ſe nomment cartes droites, pour les diſtinguer des cartes de repriſe & de réjouiſſance ; il ſe donne une carte, & enſuite il tire la réjouiſſance. Cela étant fait, il continue de tirer toutes les cartes de ſuite ; il gagne ce qui eſt ſur la carte d'un coupeur, lorſqu'il amene la carte de ce coupeur ; & il perd tout ce qui eſt au jeu, lorſqu'il amene la ſienne. Enfin s'il amene toutes les cartes droites des coupeurs avant que d'amener la ſienne, il recommence & continue d'avoir la main, ſoit qu'il ait gagné ou perdu la réjouiſſance. Voilà les regles les plus generales de ce Jeu : En voici quelqu'autres particulieres qui ont raport au Problême propoſé.

1°. Lorſque celui qui a la main, que je nommerai toujours Pierre, donne une carte double à un coupeur, c'eſt à dire une carte de même eſpece qu'une autre carte qu'il a déja donnée à un autre coupeur qui eſt plus à ſa droite, il gagne le fond du jeu ſur la carte perdante, & il eſt obligé de tenir le double ſur la carte double.

2°. Lorſque Pierre donne une carte triple à un coupeur, il gagne ce qui eſt ſur la carte perdante, & il eſt tenu de mettre quatre fois le fond du jeu ſur la carte triple.

3°. Lorſque Pierre donne une carte quadruple à un coupeur, il reprend ce qu'il a mis ſur les cartes ſimples ou doubles; s'il y en a, il perd ce qui eſt ſur la carte triple de même eſpece que la quadruple qu'il amene, & il quitte la main ſur le champ, ſans donner d'autres cartes.

4°. S'il ſe donne à lui-même une carte quadruple, il prend tout ce qu'il y a ſur les cartes des coupeurs, &, ſans donner d'autres cartes, il recommence la main.

5°. Lorſque la carte de la réjouiſſance eſt quadruple, elle ne va point.

6°. C'eſt encore une loi du jeu, qu'un coupeur, dont la carte eſt priſe, eſt obligé de payer le fond du Jeu à chaque coupeur qui a une carte devant lui, ce qui s'appelle arroſer : mais il y a cette diſtinction à faire, que quand c'eſt une carte droite, celui qui perd paye aux autres cartes droites le fond du jeu, ſans avoir égard à ce que la ſienne ou la carte droite des autres coupeurs ſoit ſimple, double ou triple; au lieu que quand c'eſt une carte de repriſe, on ne paye & on ne reçoit que ſelon les regles du parti. Or dans ce Jeu les partis ſont de mettre trois contre deux, lorſqu'on a carte double contre carte ſimple; deux contre un, lorſqu'on a carte triple contre carte double, & trois contre un, lorſqu'on a carte triple contre carte ſimple.

Ces regles étant bien conçues, ſi l'on veut ſçavoir en quoi conſiſte la difficulté de la premiere partie de ce Problême, qui eſt de déterminer l'avantage de celui qui a la main, il faut obſerver,

1°. Que l'avantage d'avoir la main en renferme un autre fort considerable, qui est de conserver à Pierre le droit de tenir les cartes autant de fois qu'il aura amené toutes les cartes droites des coupeurs avant que d'amener la sienne. Or comme cela peut arriver plusieurs fois de suite, tel nombre de coupeurs qu'il y ait, il faut, en examinant l'avantage de celui qui tient les cartes, avoir égard à l'esperance qu'il a de faire la main un nombre de fois quelconque indéterminément. D'où il suit qu'on ne peut exprimer l'avantage de Pierre que par une suite composée d'un nombre infini de termes, qui iront toujours en diminuant ; ce qui donne quelque sujet de croire qu'on ne peut jamais avoir la valeur précise de l'avantage de Pierre, mais seulement une valeur d'autant plus exacte, qu'on employera un plus grand nombre des termes de la suite.

2°. Que Pierre a d'autant moins d'esperance de faire la main, qu'il y a plus de coupeurs & plus de cartes simples parmi les cartes droites.

3°. Que l'obligation où est Pierre de mettre le double du fond du jeu sur les cartes doubles, & le quadruple sur les cartes triples, diminue l'avantage qu'il auroit en amenant des cartes doubles ou triples avant que de se donner la sienne ; & que son avantage est augmenté par cette autre condition du jeu, qui lui permet de reprendre en entier ce qu'il a mis sur les cartes doubles & triples, lorsqu'il donne à un des coupeurs une carte quadruple.

Ces remarques, & quelqu'autres pareilles que j'obmets, peuvent faire connoître que ce Problême est plus composé qu'il ne paroît d'abord.

Pour le résoudre, voici la route que je tiens. J'examine d'abord toutes les dispositions differentes que le jeu peut avoir, avant que Pierre se soit donné sa carte, & je détermine combien il y a de probabilité que chacune des dispositions possibles se trouvera à l'exclusion des autres. Ensuite je cherche quelle est l'esperance de Pierre dans chacune de ces dispositions differentes de se donner une carte ou simple, ou double, ou triple, ou quadruple. En troisiéme lieu, j'examine en particulier ce que chacun

des

des differens rapports de la carte de Pierre à celles des coupeurs lui peut donner de gain ou de perte. Enfin après ces recherches, il ne reſte qu'à operer ſelon les regles ordinaires de l'Analyſe. Il ſeroit long & difficile de faire entendre la methode, ſans en faire l'application ſur des cas particuliers: ainſi, ſans m'étendre davantage, je commence comme dans le Problême précedent par le cas le plus ſimple.

PROPOSITION V.

PREMIER CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait trois coupeurs, Pierre, Paul & Jacques. Paul eſt le premier à la droite, & Jacques le ſecond. On demande combien il y a d'avantage pour Pierre à avoir la main.

SOIT le fond du jeu appellé A.

On remarquera:

1°. Qu'il y a à parier ſeize contre un, que les cartes de Paul & de Jacques ſe trouveront ſimples, lorſque Pierre ſera ſur le point de tirer ſa carte & un contre ſeize que la carte de Jacques ſe trouvera double.

2°. Que les cartes de Paul & de Jacques étant ſimples, Pierre a ſix coups ſur cinquante pour amener carte double, & par conſequent quarante-quatre ſur cinquante, pour amener carte ſimple.

3°. Que la carte de Jacques étant double, Pierre a deux coups ſur cinquante pour gagner tout, en amenant carte triple, & par conſequent quarante-huit ſur cinquante, pour amener carte ſimple.

4°. Que ſi Pierre amene carte ſimple, les cartes de Paul & de Jacques étant ſimples, ſon ſort eſt $2A$; ce qui eſt évident: mais que ſi Pierre amene carte double, ſon ſort eſt $3A + \frac{1}{5}A$. Car amenant carte double, il prend

d'abord $2A$, c'eſt à dire la miſe de celui qui perd & la ſienne propre, & outre cela il a ſa miſe ſur la carte du Joueur qui reſte, & l'avantage d'avoir carte ſimple contre carte double : or cet avantage eſt $\frac{1}{5}A$; en voici la preuve. Pierre ayant carte double contre carte ſimple, a trois coups pour gagner, & ſeulement deux coups pour perdre ; ſon ſort ſera donc en ce cas $3 \times 2A + 2 \times 0$ diviſé par 5. Donc ſon ſort ſera $A + \frac{1}{5}A$, & ſon avantage $\frac{1}{5}A$.

5°. Que ſi Pierre amene carte ſimple, la carte de Jacques étant double, ſon ſort eſt $2A - \frac{2}{5}A$. Car c'eſt une loi du jeu, que Jacques ayant carte double eſt en droit de mettre $2A$ ſur ſa carte, & d'obliger Pierre à en mettre autant quoiqu'à ſon deſavantage. On a vû ci-devant que l'avantage de celui qui a carte double contre carte ſimple eſt la cinquiéme partie de la miſe de chacun : or ici la miſe de Jacques étant $2A$, ſon avantage & le deſavantage de Pierre ſera $\frac{2}{5}A$. Il eſt évident que ſi Pierre amenoit carte triple, ſon ſort ſeroit $4A$.

6°. Il faut encore obſerver que Pierre hazarde $2A$, lorſque les cartes de Paul & de Jacques ſont ſimples ; mais qu'il hazarde ſeulement A, lorſque la carte de Jacques eſt double : De tout cela il ſuit que l'avantage qu'a Pierre dans un tour eſt $\frac{16}{17} \times \frac{18}{125}A + \frac{1}{17} \times \frac{87}{125}A = \frac{375}{2125}A = \frac{3}{17}A$.

Maintenant pour ſçavoir ce qu'il faut ajouter à cet avantage pour avoir égard à l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, il faut déterminer quel eſt le nombre qui exprime cette eſperance, & le multiplier par l'avantage déja trouvé $\frac{3}{17}A$.

Il eſt clair que cette eſperance eſt differente ſelon toutes les differentes diſpoſitions que peuvent avoir les cartes des trois coupeurs. Ainſi il faut chercher quel degré de probabilité il y a que chacune de ces diſpoſitions poſſibles ſe trouvera, & multiplier chacun des nombres qui les exprime par le degré de probabilité qu'il y a que dans telle & telle diſpoſition Pierre fera la main.

Or je trouve que ſur vingt-deux mil cent differentes diſpoſitions poſſibles des trois cartes de Pierre, Paul &

Jacques, il y en a dix-huit mil trois cens quatre, pour que les trois cartes ſoient ſimples; deux mil quatre cens quatre-vingt-ſeize, pour que la carte de Pierre ſoit double; mil deux cens quarante-huit, pour que la carte de Jacques ſoit double; & cinquante-deux pour que celle de Pierre ſoit triple.

Il faut encore obſerver, 1°, que lorſque les trois cartes de Pierre, Paul & Jacques ſont ſimples, il y a à parier un contre deux que Pierre fera la main.

2°. Qu'il y a à parier trois contre deux, lorſque la carte de Pierre eſt double; & deux contre trois, lorſque la carte de Jacques eſt double.

De tout cela il ſuit que ſi l'on ſuppoſe, pour abreger, $\frac{1}{17}A = b$, l'eſperance qu'a Pierre de faire la main ſera exprimée par cette quantité,

$$\frac{18304 \times \frac{1}{5}b + 2496 \times \frac{3}{5}b + 1248 \times \frac{2}{5}b + 52 \times b}{22100} = \frac{2351}{6375}b.$$

Donc ſi l'on nomme b l'avantage de Pierre, lorſque l'on ſuppoſe indéterminément qu'il continuera de tenir les cartes autant de fois qu'il continuera de faire la main (ce qui eſt le Problême cherché) on aura $b = \frac{1}{17}A + \frac{2351}{6375} \times \frac{1}{17}A + \frac{2351}{6375} \times \frac{2351}{6375} \times \frac{1}{17}A + \overline{\frac{2351}{6375}}^{3} \times \frac{1}{17}A +$ &c.

La ſomme de cette ſuite infinie eſt $\frac{19125}{68408}A$, en ſorte que ſi le jeu eſt aux piſtolles, l'avantage de celui qui a la main ſera de 2 liv. 15 ſols, & environ 10 deniers.

SECOND CAS.

Je ſuppoſe qu'il y ait quatre coupeurs; le quatriéme ſe nomme Jean.

POUR découvrir en combien de manieres differentes les cartes des trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean peuvent arriver ou ſimples, ou doubles, ou triples; il faut ſe ſouvenir que dans le cas precedent on a trouvé qu'il y a

seize contre un à parier que la carte du premier coupeur étant simple, celle du second le sera aussi; & que les cartes de deux coupeurs étant simples, il y a vingt-deux contre trois à parier que la carte suivante sera simple. 2°. Que les cartes des deux premiers coupeurs étant simples, il y a six contre quarante-quatre à parier que la troisiéme sera double. 3°. Qu'il y a un contre seize à parier que la carte du second coupeur sera double; & que la carte du second coupeur étant double, il y a deux sur cinquante pour amener une carte triple, & par consequent quarante-huit sur cinquante pour amener carte simple.

De tout cela il suit,

1°. Que pour déterminer combien il y a à parier que dans ce cas-ci les cartes des trois coupeurs seront simples; il faut multiplier le nombre $\frac{22}{25}$ qui exprime le degré de probabilité qu'il y a que les cartes de Paul & de Jacques étant simples, celle de Jean le sera aussi, par le nombre $\frac{16}{17}$ qui exprime combien il y a de probabilité que celle de Jacques sera simple; ainsi il y a à parier trois cens cinquante-deux contre soixante & treize, que les cartes des trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean seront simples. 2°. Que pour avoir le nombre qui exprime combien il y a à parier que la carte de Jean sera double, il faut multiplier $\frac{6}{50}$ par le nombre $\frac{16}{17}$. 3°. Que pour avoir le nombre qui exprime combien il y a de probabilité que celle de Jacques sera double, & celle de Jean simple, il faut multiplier $\frac{1}{17}$ par le nombre $\frac{24}{25}$. 4°. Que la fraction $\frac{1}{17} \times \frac{1}{25}$ exprime combien il y auroit à parier que la carte de Jean seroit triple.

Maintenant il faut déterminer quel est le sort de Pierre dans chacune de ces quatre dispositions differentes des cartes des trois Joueurs.

L'on trouvera, 1°, que les cartes de Paul, Jacques & Jean étant simples, Pierre sur quarante-neuf cartes qui restent, en a quarante à tirer qui peuvent lui donner carte simple, & neuf qui lui peuvent donner carte double. Or

le ſort de Pierre lorſqu'il a carte ſimple, les cartes des trois autres coupeurs étant ſimples auſſi, eſt $3A$; & ſon ſort, lorſqu'il a carte double, deux quelconques d'entre les coupeurs ayant carte ſimple, eſt $4A + \frac{2}{5}A$. On aura donc le ſort de Pierre, lorſque les cartes des trois autres coupeurs ſont ſimples, $= \frac{40}{49} \times 3A + \frac{9}{49} \times 4\overline{A + \frac{2}{5}A} = \frac{798}{245}A = 3A + \frac{63}{245}A$.

2°. Que la carte de Jean étant double, Pierre a ſur quarante-neuf cartes qui reſtent quarante-quatre cartes à tirer qui lui peuvent donner carte ſimple, trois cartes qui lui peuvent donner carte double, & enfin deux cartes qui lui peuvent donner carte triple. Or le ſort de Pierre, lorſque ſa carte eſt ſimple, eſt $2A + \frac{3}{5}A$; & ſon ſort, lorſque ſa carte eſt double, eſt $4A$. Enfin ſon ſort, lorſque ſa carte eſt triple, eſt $4A + \frac{3}{2}A$. Car, Pierre ayant carte triple contre une autre carte ſimple, devroit parier trois contre un pour parier également, & par conſéquent il a trois contre un ſur la ſomme qui eſt couchée ſur la carte qui reſte : Donc ſi la carte de Jean eſt double, le ſort de Pierre ſera $= \frac{44}{49} \times 2\overline{A + \frac{3}{5}A} + \frac{3}{49} \times 4A + \frac{2}{49} \times 4\overline{A + \frac{3}{2}A} = \frac{687}{245}A = 2A + \frac{197}{245}A$.

On trouvera que le ſort de Pierre ſera le même, c'eſt à dire $2A + \frac{197}{245}A$, lorſque la carte de Jacques ſera double.

3°. On obſervera que la carte de Jean étant triple, Pierre ſur quarante-neuf cartes en a quarante-huit, qui lui donnent carte ſimple contre carte triple, & une ſeulement qui lui donne carte quadruple.

Or le ſort de Pierre lorſque ſa carte eſt ſimple eſt $2A$, car il a un coup pour avoir $8A$, & trois coups pour avoir zero. Son ſort, lorſque ſa carte eſt quadruple, eſt $8A$. Donc ſi la carte de Jean eſt triple, le ſort de Pierre ſera $= \frac{48}{49} \times 2A + \frac{1}{49} \times 8A = \frac{104}{49}A = A + \frac{55}{49}A$.

Il faut encore remarquer que Pierre ne hazarde $3A$ que dans le cas où les cartes de Paul, Jacques & Jean ſont

simples ; qu'il hazarde seulement $2A$ dans le cas où la carte, soit de Jacques, soit de Jean, est double, & seulement A dans le cas où la carte de Jean est triple.

Tout cela supposé, l'avantage qu'a Pierre dans chaque main, sera exprimé par cette quantité,

$$\frac{352\times 63+72\times 197+55\times 5\times A}{425\times 245}=\frac{7327}{17\times 25\times 49}A=\frac{7327}{20825}A.$$

Il s'agit maintenant de découvrir combien il y a de probabilité que Pierre fera la main. Pour en venir à bout, il faut s'y prendre comme l'on a fait dans le cas précedent ; examiner quel est le nombre qui exprime chacune des dispositions suivantes des quatre cartes. Sçavoir, 1°, que toutes les cartes soient simples ; 2°, que la carte de Pierre soit simple, l'une des trois autres étant double ; 3°, que la carte de Pierre soit double, deux autres quelconques étant simples ; 4°, que la carte de Pierre soit double, une des autres étant double ; 5°, que la carte de Jean soit triple, celle de Pierre étant simple ; 6°, que la carte de Pierre soit triple, l'une quelconque des trois autres étant simple ; 7°, que la carte de Pierre soit quadruple ; & ensuite chercher quelle est l'esperance de Pierre de faire la main dans chacune de ces sept dispositions differentes des quatre cartes.

Or je trouve qu'exprimant l'esperance qu'a Pierre de faire la main dans les sept dispositions differentes ci-dessus marquées par les inconnues x, y, z, u, t, p, l, selon l'ordre qu'on vient de leur donner, & designant par la lettre b ce qui revient à Pierre de cette esperance, & par la lettre g l'avantage de Pierre lorsqu'on suppose qu'il recommencera une seconde fois à tenir les cartes, en cas qu'il fasse la main dans le premier tour, on aura

$$g=b+\frac{14080x+2112+1056\times y+3168z+\overline{72+144}\times u}{20825}$$
$$+\frac{48t+\overline{48+96}\times p+1\times l}{20825}.$$

On trouvera aussi $x = \frac{1}{4}b$, $y = \frac{11}{40}b$, $q = \frac{9}{20}b$, $u = \frac{1}{2}b$, $t = \frac{1}{4}b$, $p = \frac{3}{4}b$, $l = b$; & substituant ces valeurs, on aura

$$g = b + \frac{14080 \times \frac{1}{4}b + 3168 \times \frac{29}{40}b + 216 \times \frac{1}{2}b + 48 \times \frac{3}{4}b + 144 \times \frac{3}{4}b + b}{20825}$$

$$= b + \frac{30229}{104125} = \frac{7327}{20825}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A.$$

Donc si l'on nomme b l'avantage de Pierre, lorsqu'on suppose indéterminément qu'il continuera de tenir les cartes jusqu'à ce qu'il ait manqué de faire la main, on aura

$$b = \frac{7327}{20825}A + \overbrace{\frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A}^{2} + \overbrace{\frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A}^{3} + \frac{30229}{104125} \times \frac{7327}{20825}A + \&c.$$

TROISIE'ME CAS.

L'on suppose qu'il y ait cinq coupeurs, je nomme le cinquiéme Thomas, & le reste comme ci-devant.

LORSQUE Pierre va tirer sa carte, voici toutes les dispositions differentes où se peuvent trouver les cartes des quatre autres coupeurs.

1°. Les cartes de Paul, Jacques, Jean, Thomas, peuvent se trouver simples, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette disposition se trouvera, est $\frac{40}{49} \times \frac{22}{25} \times \frac{16}{17}$.

2°. La carte de Thomas peut se trouver simple, celle de Jean étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette disposition de cartes se trouvera, est $\frac{44}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{16}{17}$.

3°. La carte de Thomas peut se trouver simple, celle de Jacques étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette disposition de cartes se trouvera, est $\frac{44}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

4°. La carte de Thomas peut se trouver simple, celle de Jean étant triple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette disposition de cartes se trouvera, est $\frac{48}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{17}$.

5°. La carte de Thomas peut se trouver double, les car-

tes des deux autres quelconques étant ſimples, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{9}{49} \times \frac{22}{25} \times \frac{16}{17}$.

6°. La carte de Thomas peut ſe trouver double, celle de Jacques étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{3}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

7°. La carte de Thomas peut ſe trouver double, celle de Jean étant double, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{3}{49} \times \frac{3}{25} \times \frac{16}{17}$.

8°. La carte de Thomas peut ſe trouver triple, la carte de Jean étant ſimple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{2}{49} \times \frac{24}{25} \times \frac{1}{17}$.

9°. La carte de Thomas peut ſe trouver triple, la carte de Paul ou de Jacques étant ſimple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition ſe trouvera, eſt $\frac{2}{49} \times \frac{3}{25} \times \frac{16}{17}$.

10°. La carte de Thomas peut ſe trouver quadruple, & le nombre qui exprime combien il y auroit à parier que cette diſpoſition arrivera, eſt $\frac{1}{49} \times \frac{1}{25} \times \frac{1}{17}$.

On pourroit aiſément démontrer tout ceci, mais il faudroit faire de longs diſcours, qui étant fort abſtraits, donneroient trop de peine aux Lecteurs. Les réflexions que j'ai faites dans les deux cas précedens peuvent ſervir de démonſtration pour celui-ci aux perſonnes intelligentes. J'ai affecté de ne point confondre les produits des quantités qui ſe multiplient, & de les laiſſer ſous cette forme $\frac{40 \times 22 \times 16}{49 \times 25 \times 17}$, $\frac{44 \times 3 \times 16}{49 \times 25 \times 16}$, &c. afin d'en mieux faire connoître l'ordre & la formation.

On pourra en cette maniere découvrir toutes les differentes diſpoſitions poſſibles des cartes de cinq coupeurs, en ſe ſervant des valeurs qui ont déterminé celles de quatre coupeurs, de même qu'on vient de ſe ſervir pour le cas preſent de celles qu'on avoit déja trouvées pour

trois

trois coupeurs, afin de déterminer toutes les differentes dispositions possibles des cartes de quatre coupeurs ; & trouver de nouveau celles de six par le moyen de celles qu'on aura trouvés pour cinq coupeurs, & ainsi de suite ; & par consequent cette methode est autant generale qu'il est possible.

Il est à propos de remarquer qu'il n'est pas toujours necessaire de connoître toutes les variations qui peuvent se trouver dans la disposition des cartes des coupeurs, car suivant la nature du Problême, on peut en confondre certaines, & négliger de les considerer separément, ce qui dans certaines rencontres diminue extrémement le travail de l'esprit & abrege la solution. Cette remarque est tres importante pour le Problême qui suivra, elle a aussi lieu dans celui-ci, où il faut observer qu'on peut comprendre dans une même fraction le second, le troisiéme & le cinquiéme article, le sixiéme & le septiéme, le quatriéme, le huitiéme & le neuviéme, d'où il suit que de toutes les variations qui se peuvent trouver entre les dispositions des cartes de quatre coupeurs, il n'y en a que cinq qu'il soit à propos de considerer, & que par consequent si l'on nomme x le sort de Pierre lorsque les cartes des quatre autres coupeurs sont simples.

y son sort lorsqu'il y en a une double, les deux autres quelconques étant simples.

t son sort lorsqu'il y en a deux doubles.

z son sort lorsqu'il y en a une triple & une simple.

p son sort lorsque la carte de Thomas est quadruple.

On aura le sort de Pierre dans chaque main

$$= \frac{14080x + 6336y + 1925 + 216t + p}{20825}$$

Pour connoître la valeur de x, on remarquera que Pierre en tirant dans quarante-huit cartes en a trente-six qui lui peuvent donner carte simple, & douze qui lui peuvent donner carte double. Or le sort de Pierre lorsqu'il a carte simple est $4A$, & son sort lorsqu'il a carte double est $2A + \frac{3}{5} \times 6A$. De là il suit que $x = \frac{36}{48} \times 4A + \frac{12}{48} \times \overline{5A + \frac{3}{5}A} = \frac{1056}{140}A = 4A + \frac{2}{5}A$.

Pour déterminer la valeur de y, on remarquera que ſur quarante-huit cartes qui reſtent il y en a deux qui peuvent donner carte triple à Pierre, ſix qui peuvent lui donner carte double, & par conſequent quarante qui peuvent lui donner carte ſimple. Or le ſort de Pierre lorſque ſa carte eſt triple, eſt $4A + \frac{1}{4} \times 4A = 7A$, & ſon ſort lorſque ſa carte eſt double, eſt $5A + \frac{1}{5} A$, & ſon ſort lorſque ſa carte eſt ſimple, eſt $3A + \frac{3}{5} A$. De tout cela il ſuit que $y = \frac{2}{48} \times 7A + \frac{6}{48} \times 5A + \frac{1}{5} A + \frac{40}{48} \times 3A + \frac{3}{5} A = 3A + \frac{111}{120} A$.

On trouvera par de ſemblables raiſonnemens

$z = \frac{1}{48} \times 10A + \frac{3}{48} \times 4A + \frac{2}{5} A + \frac{44}{48} \times 3A = 3A + \frac{1}{4} A$.

$t = \frac{4}{48} \times 4A + \frac{2}{3} \times 4A + \frac{44}{48} \times \frac{2}{5} \times 8A = 3A + \frac{22}{45} A$.

$p = 0$.

De tout cela on peut conclure que l'avantage de Pierre dans chaque main eſt

$$\frac{14080 \times \frac{2}{5} A + 6336 \times \frac{111}{120} A + 192 \times \frac{5}{4} A + 216A + \frac{22}{45} A - A}{20825} = \frac{12159}{20825} A.$$

Pour déterminer l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, on fera des raiſonnemens pareils à ceux des deux cas précedents, & l'on trouvera que cette eſperance eſt exprimée par la fraction $\frac{106994}{437325}$. Cela poſé, l'avantage cherché de Pierre ſera $\frac{12159}{20825} A + \frac{106994}{437325} \times \frac{12159}{20825} A + \overline{\frac{106994}{437325}}^{2} \times \frac{12159}{20825} A + \overline{\frac{106994}{437325}}^{3} \times \frac{12159}{20825} A +$ &c.

QUATRIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait ſix coupeurs, je nomme le ſixiéme André, & le reſte comme ci-devant.

SI l'on nomme x le ſort de Pierre lorſque les cartes des cinq coupeurs ſont ſimples.

y ſon ſort quand l'une des cinq eſt double, les autres étant ſimples.

z ſon ſort quand il y en a une triple & deux ſimples.

t ſon ſort quand il y en a deux doubles.

q ſon ſort quand il y en a une triple & une double,

p ſon ſort quand le dernier joueur, qui eſt ici André, a une carte quadruple.

f ſon ſort quand Thomas, qui eſt le penultiéme joueur, a une carte quadruple.

On aura le ſort de Pierre dans chaque main

$$= \frac{10560x + 8800y + 440z + 990t + 30q + 4p + f}{20825}$$

On trouvera auſſi

$$x = 5A + \tfrac{27}{47}A$$
$$y = 5A + \tfrac{26}{235}A$$
$$z = 4A + \tfrac{96}{235}A$$
$$t = 4A + \tfrac{92}{141}A$$
$$q = 3A + \tfrac{227}{235}A$$
$$p = A$$
$$f = 0;$$

ce qui donnera l'avantage de Pierre dans chaque main

$$= \frac{10560 \times \overline{\tfrac{27}{47}A} + 8800 \times \overline{A + \tfrac{26}{235}A} + 440 \times \overline{A + \tfrac{96}{235}A} + 990 \times \overline{A + \tfrac{92}{141}A} + 30 \times \overline{A + \tfrac{227}{235}A} + 5 \times -A}{20825}$$

$$= \tfrac{170607}{195755}A.$$

On trouvera par des calculs aſſez longs, mais pareils à ceux des cas précedents, que l'eſperance qu'à Pierre de faire la main, eſt exprimée par la fraction $\frac{1899236042}{10473828825}$, en ſorte qu'on aura l'avantage cherché $= \frac{170607}{195755}A + \frac{1899236042}{10473828825} \times \frac{170607}{195755}A + \overline{\frac{1899236042}{10473828825}}^{2} \times \frac{170607}{195755}A + \overline{\frac{1899236042}{10473828825}}^{3} \times \frac{170607}{195755}A +$ &c.

CINQUIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe qu'il y ait ſept coupeurs.

SOIT x l'avantage de Pierre lorſque les ſix cartes ſont ſimples.

y quand il y en a une double & quatre ſimples.

z quand il y en a deux doubles & deux ſimples.
u quand il y en a trois doubles.
t quand il y en a une triple & trois ſimples.
r quand il y en a une triple, une double & une ſimple.
p quand il y en a deux triples.
q quand il y en a une quadruple & deux ſimples.
m quand il y en a une quadruple & une double.

On aura l'avantage de Pierre dans chaque main
$= 67584x + 95040y + 23760z + 594u + 7040t + 1584r + 12p + 132q + 9m$

$$\frac{20825 \times 5}{195755}$$

$x = \frac{18}{23}A, y = \frac{151}{115}A, z = \frac{638}{345}A, u = \frac{55}{23}A, t = \frac{184}{115}A, r = \frac{99}{46}A, p = \frac{58}{23}, q = -A, p = 0.$

Donc ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de x, y, z, &c. on aura l'avantage de Pierre dans chaque main $= 67584 \times \frac{18}{23}A + 95040 \times \frac{151}{115}A + 23760 \times \frac{638}{345}A + 594 \times \frac{55}{23}A + 7040 \times \frac{184}{115}A + 1584 \times \frac{99}{46}A + 12 \times \frac{58}{23}A + 132 \times -A + 9 \times 0.$

$$= \frac{5465122}{4502365}A = A + \frac{962757}{4502365}A.$$

L'on trouvera que l'eſperance qu'a Pierre de faire la main, eſt exprimée par la fraction $\frac{9171600302577 19}{6102195875135235}$, & par conſequent l'avantage cherché ſera

$$\frac{5465122}{4502365}A + \frac{9171600302577 19}{6102195875135235} \times \frac{5465122}{4502365}A + \overline{\frac{9171600302577 19}{6102195875135235}}^{2} \times \frac{5465122}{4502365}A + \overline{\frac{9171600302577 19}{6102195875135235}}^{3} \times \frac{5465122}{4502365}A + \text{&c.}$$

On pourra ainſi trouver l'avantage de Pierre, en ſuppoſant qu'il y ait un plus grand nombre de coupeurs, la methode en ſeroit la même, mais les calculs en ſeroient ſi longs, & les raiſonnemens que ſuppoſent les calculs ſi embaraſſés, que je crois devoir me diſpenſer d'aller plus loing; il eſt rare qu'il y ait plus de ſept coupeurs, & l'utilité qu'on pourroit tirer d'une table calculée pour un plus grand nombre de coupeurs ne ſeroit pas à notre avis aſſez

considerable pour dédommager de la peine qu'elle donneroit.

Je vais presentement donner la solution de l'autre partie du Problême que je me suis proposé sur le Lansquenet, sçavoir de déterminer les divers desavantages des coupeurs qui sont dans des places differentes à la droite & à la gauche de Pierre. La methode que j'emploirai aura beaucoup de raport à la précedente, ainsi pour la faire entendre je me contenterai d'en faire l'essai & l'application sur un cas particulier tel qu'est celui qui suit.

PROPOSITION VI.

PROBLÊME II.

Déterminer quel est le raport des differens desavantages de trois coupeurs, Paul, Jacques & Jean, en supposant comme dans le second cas du Problême précedent, que Pierre quatriéme coupeur tient la main, que Paul est le premier à sa droite, que Jacques suit Paul, & que Jean est à la gauche de Pierre.

ON a trouvé dans la solution de ce second cas du Problême précedent, page 38, que l'avantage de Pierre dans chaque main étoit exprimé par la fraction $\frac{7327}{20825}$, en sorte que le jeu étant aux pistoles, il doit estimer son avantage trois livres dix sols & quelques deniers. Or il est clair que cet avantage de Pierre tombe en perte sur les autres coupeurs, mais inégalement sur chacun, en sorte, par exemple, que Paul en porte plus que Jacques, & Jacques plus que Jean.

La difficulté du Problême consiste à découvrir selon quelle proportion cette perte ou ce desavantage commun se distribue entre chacun des trois coupeurs.

Pour trouver ce raport je cherche séparément le desavantage de chacun des trois joueurs, & pour cela j'examine

toutes les diſpoſitions poſſibles des quatre cartes droites qui varient le ſort de chacun des joueurs, & j'obſerve dans chacune quel eſt ſon deſavantage, ayant égard à ce que les arroſemens lui donnent ou lui font eſperer de gain ou de perte. Je multiplie chacun des nombres qui exprime les differentes diſpoſitions de cartes qui varient la condition du joueur par l'avantage ou le deſavantage qu'elles lui donnent; j'ajoute tous ces produits, & je diviſe leur ſomme par 20825, qui eſt le produit de ces trois nombres 17, 25, 49; l'expoſant de cette diviſion exprime le deſavantage de ce joueur.

Trouver le deſavantage de Paul.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs ſont ſimples, il n'y a ni avantage ni deſavantage pour Paul.

2°. Quand la carte de Pierre eſt double, celles de Jacques & de Jean étant ſimples, le deſavantage de Paul eſt exprimé par $-3A$.

3°. Quand la carte de Pierre eſt double, celle de Paul étant ſimple, l'avantage de Paul eſt $\frac{4}{5}A$.

4°. Quand la carte de Jacques eſt double, le deſavantage de Paul eſt exprimé par $-A$.

5°. Quand la carte de Jean eſt double, celle de Paul étant en perte, le deſavantage de Paul eſt exprimé par $-2A$.

6°. Quand la carte de Jean eſt double, celles de Pierre & de Paul étant ſimples, l'avantage de Paul eſt $\frac{4}{7}A$.

7°. Quand la carte de Jean eſt double de celle de Jacques, & la carte de Pierre double de celle de Paul, le deſavantage de Paul eſt exprimé par $-A$.

8°. Quand la carte de Pierre eſt triple, celle de Paul étant ſimple, l'avantage de Paul eſt $\frac{1}{2}A$.

9°. Quand la carte de Jean eſt triple, le deſavantage de Paul eſt exprimé par $-A$.

Les nombres qui expriment combien il y a de probabilité que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trou-

vera, ſont à commencer par la ſeconde, & en continuant avec ordre,

352×3, 352×6, 24×49, 24×49, 24×44, 24×3, 24×2, 49,

& par conſequent le deſavantage de Paul ſera exprimé par cette quantité

$$\frac{352\times3\times5\times-3A+352\times6\times4A+24\times49\times5\times-3A+24\times44\times4A+72\times5\times-A+72\times5\times A+49\times5\times-A}{20825\times5}$$

qui étant réduite devient $-\frac{21053}{104125}A$; & cette fraction exprime le deſavantage de Paul.

Trouver le deſavantage de Jacques.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs ſont ſimples, il n'y a ni avantage ni deſavantage pour Jacques.

2°. Quand la carte de Pierre étant double, celles de Paul & de Jean ſont ſimples, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-3A$.

3°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jacques eſt ſimple, l'avantage de Jacques eſt $\frac{4}{5}A$.

4°. Quand la carte de Jean étant double, celles de Jacques & de Pierre ſont ſimples, l'avantage de Jacques eſt $\frac{4}{5}A$.

5°. Quand la carte de Jean étant double de celle de Paul, la carte de Pierre eſt double de celle de Jacques, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-A$.

6°. Quand la carte de Jean étant double, celles de Paul & de Pierre ſont ſimples, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

7°. Quand la carte de Jean étant double, celle de Pierre eſt double de la carte de Paul, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

8°. Quand la carte de Jacques étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, l'avantage de Jacques eſt $\frac{3}{2}A$.

9°. Quand la carte de Paul étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

10°. Quand la carte de Jacques étant double, celles de Jean & de Pierre ſont ſimples, ſon avantage eſt $\frac{3}{7}A$.

11°. Quand la carte de Jacques étant double, celle de Pierre eſt double, l'avantage de Jacques eſt A.

12°. Quand la carte de Jean étant ſimple, celle de Pierre eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-3A$.

13°. Quand la carte de Pierre eſt quadruple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

14°. Quand la carte de Pierre étant ſimple, celle de Jean eſt triple, le deſavantage de Jacques eſt exprimé par $-2A$.

Les nombres qui expriment combien il y a de probabilité que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trouvera, ſont à commencer par la ſeconde, & en continuant avec ordre,

$3\times352, 6\times352, 24\times44, 24\times3, 24\times44, 24\times3, 24\times2, 24\times2, 24\times44, 24\times3, 24\times2, 1, 48,$

& par conſequent le deſavantage de Jacques ſera exprimé par cette quantité

$$3\times352\times-3A+6\times352\times\tfrac{4}{5}A+24\times44\times\tfrac{4}{5}A+24\times3\times-A+24\times44\times-2A+24\times3\times-2A+24\times2\times\tfrac{1}{2}A+24\times2\times-2A+24\times44\times\tfrac{3}{5}A+24\times3A+24\times2\times-3A+1\times-2A+48\times-2A$$

$$20825$$

Ce qui étant réduit donne cette fraction $-\frac{12610}{104125}A$, qui exprime le deſavantage de Jacques.

Trouver le deſavantage de Jean.

1°. Quand les cartes des quatre coupeurs ſont ſimples, il n'y a ni avantage ni deſavantage pour Jean.

2°. Quand la carte de Jean étant double, celle de Pierre eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{3}{7}A$.

3°. Quand la carte de Pierre & celle de Jean ſont ſimples, celle de Jacques étant double, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-\frac{1}{5}A$.

Quand

4°. Quand la carte de Pierre étant ſimple, celle de Jean eſt triple, l'avantage de Jean eſt $2A$.

5°. Quand la carte de Pierre étant double, celles de Paul & de Jacques ſont ſimples, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-3A$.

6°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jean eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{4}{5}A$.

7°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jacques eſt double, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-2A$.

8°. Quand la carte de Pierre étant double, celle de Jean eſt double, l'avantage de Jean eſt A.

9°. Quand la carte de Pierre étant triple, celle de Jean eſt ſimple, l'avantage de Jean eſt $\frac{1}{2}A$.

10°. Quand la carte de Pierre étant triple, celle de Paul ou de Jacques ſont ſimples, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-3A$.

11°. Quand la carte de Pierre eſt quadruple, le deſavantage de Jean eſt exprimé par $-4A$.

Les nombres qui expriment la probabilité qu'il y a que chacune de ces diſpoſitions particulieres ſe trouvera, ſont à commencer à la ſeconde, & en continuant avec ordre,

$44\times3\times16, 44\times24\times1, 48, 3\times22\times16, 6\times22\times16, 3\times24, 3\times3\times16, 2\times24, 2\times3\times16, 1,$

Et par conſequent le deſavantage de Jean ſera

$$44\times3\times16\times\tfrac{3}{5}A + 44\times24\times-\tfrac{1}{5}A + 48\times2A + 3\times22\times16\times -3A + 6\times22\times16\times\tfrac{4}{5}A + 3\times24\times-2A + 3\times3\times16\times A + 2\times24\times\tfrac{1}{2}A + 2\times3\times16\times-3A + 1\times-4A$$

$$\frac{20825}{}$$

ce qui étant réduit devient $-\frac{2972}{104125}A$, & cette fraction exprime le deſavantage de Jean.

Maintenant ſi l'on ajoute en une ſomme les deſavantages trouvés des trois joueurs Paul, Jacques & Jean, $\frac{-21053-12610-2972\times A}{20825\times5}$, on trouvera que leur ſomme $=$ $-\frac{7127}{20825}A$.

Or on a vû dans le second cas du Problême précedent, que l'avantage de Pierre dans chaque main étoit $\frac{7327}{20825}A$, & par conſequent ces deux termes étant comparés, ſe détruiſent.

On a donc la juſte proportion du deſavantage des trois joueurs, & le total de leur deſavantage, ainſi qu'on a dû le trouver.

On n'a fait ici attention qu'au deſavantage qu'a dans chaque main chacun des trois joueurs Paul, Jacques & Jean. Maintenant ſi l'on veut avoir égard à ce qui leur ſurvient de deſavantage lorſque l'on ſuppoſe que Pierre recommencera à tenir les cartes autant de fois qu'il fera la main, on trouvera le deſavantage de Paul,

$$= -1 \times \frac{21053}{104125}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{21053}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{2} \times \frac{21053}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{3} \times \frac{21053}{104125}A + \&c.$$

& celui de Jacques

$$= -1 \times \frac{12610}{104125}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{12610}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{2} \times \frac{12610}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{3} \times \frac{12610}{104125}A + \&c.$$

& celui de Jean

$$= -1 \times \frac{2972}{104125}A + \frac{30229}{104125} \times \frac{2972}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{2} \times \frac{2972}{104125}A + \overline{\frac{30229}{104125}}^{3} \times \frac{2972}{104125}A + \&c.$$

La ſomme de ces trois ſuites infinies ſera égale à celle qui exprime l'avantage de Pierre, & lui étant comparée, elles ſe détruiront ayant des ſignes contraires.

COROLLAIRE I.

SI l'on veut connoître les valeurs exactes des ſuites infinies qui expriment l'avantage de celui qui a la main, en ſuppoſant que A qui exprime le jeu ſoit une piſtole ou dix livres; on les aura dans cette table.

Pour trois coupeurs son avantage sera 2 l. 15 s. 10 d. $\frac{490}{3079}$.

Pour quatre coupeurs . . . . . 4 l. 19 s. 1 d. $\frac{2569}{3079}$.

Pour cinq coupeurs . . . . . 7 l. 14 s. 7 d. $\frac{4955}{330131}$.

Pour six coupeurs . . . . . 10 l. 12 s. 10 d. $\frac{32837213781891 8}{33570388204723}$.

Pour sept coupeurs . . . . 14 l. 16 s. 5 d. $\frac{12762103970237}{7756210003115777}$.

Il suit de là que l'avantage de celui qui a la main ne croît pas dans la même raison que le nombre des joueurs, puisque son avantage qui est environ 2 liv. 16 sols lorsqu'il y a trois coupeurs, est beaucoup plus grand que 5 liv. 12 sols lorsqu'il y a six coupeurs.

COROLLAIRE II.

SI l'on suppose que le jeu soit aux pistoles, & qu'il y ait quatre coupeurs Pierre, Paul, Jacques & Jean, ainsi que dans le second Problême, ou dans le second cas du premier, le desavantage de Paul sera 2 l. 16 s. 11 d. $\frac{2343}{3079}$;

le desavantage de Jacques sera . . 1 l. 14 s. 1 d. $\frac{1689}{3079}$;

le desavantage de Jean sera . . . 8 s. 0 $\frac{1616}{3079}$;

Il faut remarquer, 1°, que la somme des trois termes qui expriment les divers desavantages des joueurs est égale à celui-ci 4 liv. 19 s. 1 d. $\frac{2569}{3079}$, qui exprime l'avantage de Pierre; 2°, que le raport des desavantages de Paul, Jacques & Jean est à peu près comme les nombres 7, 4, 1.

COROLLAIRE III.

LA probabilité qu'il y a que Pierre fera la main, diminue à mesure qu'il y a un plus grand nombre de coupeurs; Et l'ordre de cette diminution depuis trois coupeurs jusqu'à sept inclusivement, est à peu près comme ces fractions, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

COROLLAIRE IV.

IL ſe trouve ſouvent dès coupeurs qui faute de ſçavoir leurs intereſts, ou par une imagination qu'ils ont d'avoir la main malheureuſe, ou enfin pour ne point perdre plus d'argent qu'ils n'ont deſſein d'en hazarder, paſſent leur main ſans quitter pour cela le jeu. Chaque coupeur ſçaura par le ſecond Problême, combien celui qui renonce à la main lui fait d'avantage.

COROLLAIRE V.

IL en eſt de même quand un coupeur quitte le jeu, chacun des autres coupeurs pourra découvrir par le même Problême, combien cela lui eſt avantageux ou préjudiciable.

REMARQUE I.

C'EST un préjugé commun parmi les Joueurs, que la carte de la réjouiſſance eſt favorable à ceux qui y mettent. Pour ſe deſabuſer de cette opinion, il faut prendre garde que ſi la carte de la réjouiſſance a de l'avantage dans certaines diſpoſitions des cartes des coupeurs, elle a du deſavantage en d'autres, & que cela ſe compenſe toujours exactement.

Suppoſons, par exemple, qu'il y ait trois coupeurs comme dans le premier cas du premier Problême, & que l'argent de la réjouiſſance ſoit nommé $2b$, il eſt bien vrai que l'avantage de la réjouiſſance ſera $\frac{6}{245}b$ lorſque les cartes des trois coupeurs ſeront ſimples, & $\frac{1}{49}b$ lorſque la carte de Jacques ſera double: mais en récompenſe ſon deſavantage ſera $\frac{44}{245}b$ lorſque la carte de Pierre ſera double, & $\frac{24}{49}b$ lorſqu'elle ſera triple.

Multipliant donc ces nombres par ceux qui expriment les differentes probabilités qu'il y a que telle ou telle de ces diſpoſitions ſe rencontrera, on aura $\frac{6\times 312}{245\times 425}b + \frac{24}{49\times 425}b - \frac{44\times 48}{245\times 425}b - \frac{24}{49\times 425}b = 0$; ce qui fait voir qu'il n'y a dans ce cas ni avantage, ni deſavantage pour la carte de la réjouiſſance.

On pourra découvrir la même choſe par raport à tout autre nombre de coupeurs.

REMARQUE II.

IL y a un Jeu aſſés connu qu'on nomme la Duppe, c'eſt une eſpece de Lanſquenet renverſé. La difference de ce Jeu à celui du Lanſquenet conſiſte en ce qui ſuit; 1°. celui qui tient la Duppe, ſe donne la premiere carte; 2°. celui qui a coupé les cartes eſt obligé de prendre la ſeconde; 3°. les autres Joueurs peuvent prendre ou refuſer la carte qui leur eſt preſentée; 4°. celui qui prend une carte double eſt obligé d'en faire le parti; 5°. celui qui tient la Duppe ne quitte point les cartes, & conſerve toujours la main. La reſſemblance qu'il y a de ce Jeu à celui du Lanſquenet, a fait imaginer aux Joueurs qu'il y a du deſavantage pour celui qui tient la main, & d'autant plus, qu'à ce Jeu la main ne change point, au lieu qu'au Lanſquenet chacun la tient à ſon tour. Sur ce fondement ils lui ont donné le nom de la Duppe: mais il ne lui convient nullement, car il eſt aiſé de découvrir que l'égalité eſt parfaite dans ce Jeu & pour les Joueurs entr'eux, & pour celui qui tient la main à l'égard des Joueurs. Il me ſuffit de faire cette remarque, un peu d'attention en convaincra ceux qui voudront prendre la peine de l'examiner.

PROBLÊMES DIVERS SUR LE JEU DU TREIZE.

EXPLICATION DU JEU.

LEs Joueurs tirent d'abord à qui aura la main. Suppoſons que ce ſoit Pierre, & que le nombre des Joueurs ſoit tel qu'on voudra. Pierre ayant un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes mêlées à diſcretion, les tire l'une après l'autre. Nommant & prononçant un lorſqu'il tire la premiere carte, deux lorſqu'il tire la ſeconde, trois lorſqu'il tire la troiſiéme, & ainſi de ſuite juſqu'à la treiziéme qui eſt un Roy. Alors ſi dans toute cette ſuite de cartes il n'en a tiré aucune ſelon le rang qu'il les a nommées, il paye ce que chacun des Joueurs a mis au jeu, & cede la main à celui qui le ſuit à la droite.

Mais s'il lui arrive dans la ſuite des treize cartes, de tirer la carte qu'il nomme, par exemple de tirer un as dans le temps qu'il nomme un, ou un deux dans le temps qu'il nomme deux, ou un trois dans le temps qu'il nomme trois, &c. il prend tout ce qui eſt au jeu, & recommence comme auparavant, nommant un, enſuite deux, &c.

Il peut arriver que Pierre ayant gagné pluſieurs fois, & recommençant par un, n'ait pas aſſez de cartes dans ſa main pour aller juſqu'à treize, alors il doit, loſque le jeu lui manque, mêler les cartes, donner à couper, & enſuite tirer du jeu entier le nombre de cartes qui lui eſt neceſſaire pour continuer le jeu, en commençant par celle où

il eſt demeuré dans la précedente main. Par exemple ſi en tirant la derniere carte il a nommé ſept, il doit en tirant la premiere carte dans le jeu entier, après qu'on a coupé, nommer huit, & enſuite neuf, &c. juſqu'à treize, à moins qu'il ne gagne plutôt, auquel cas il recommenceroit, nommant d'abord un, enſuite deux, & le reſte comme on vient de l'expliquer. D'où il paroît que Pierre peut faire pluſieurs mains de ſuite, & même qu'il peut continuer le jeu à l'infini.

L'avantage eſt fort conſiderable à ce Jeu en faveur de celui qui a la main, & ceux qui le jouent ſouvent peuvent s'en appercevoir par pratique; mais il eſt extrémement difficile de déterminer cet avantage: l'Analyſe y pourroit conduire, mais cette route ſeroit extrémement longue, & je trouve qu'il faudroit reſoudre plus de mille égalités pour déterminer tous les cas poſſibles de ce Jeu. On en pourroit plutôt eſperer la ſolution en conſiderant tous les arrangemens poſſibles des cinquante-deux cartes, & découvrant comme l'on a fait pour le Pharaon, & comme l'on fera dans le Problême ſuivant pour le jeu de la Baſſette, quelque loi uniforme, qui des cas ſimples conduiſe à des cas plus compoſés, & fourniſſe ainſi une ſolution generale. Je ne donnerai point ici la ſolution de ce Problême, mais en ſa place en voici deux qui y ont beaucoup de raport, & dont la ſolution pourra faciliter celle du jeu du Treize à ceux d'entre mes Lecteurs qui voudront ſe donner la peine d'en faire la recherche.

PROBLÊME.

PROPOSITION VII.

Pierre a un certain nombre de cartes differentes qui ne ſont point repetées, & qui ſont mêlées à diſcretion: il parie contre Paul que s'il les tire de ſuite, & qu'il les nomme ſelon l'ordre des cartes, en commençant ou par la plus haute, ou par la plus baſſe, il lui arrivera au moins une fois de tirer celle qu'il nommera. Par exemple Pierre ayant en main quatre cartes,

ſçavoir un as, un deux, un trois & un quatre mêlées à diſcretion, parie que les tirant de ſuite, & nommant un lorſqu'il tirera la premiere, deux lorſqu'il tirera la ſeconde, trois lorſqu'il tirera la troiſiéme, il lui arrivera ou de tirer un as lorſqu'il nommera un, ou de tirer un deux quand il nommera deux, ou de tirer un trois quand il nommera trois, ou de tirer un quatre quand il nommera quatre. Soit conçu la même choſe de tout autre nombre de cartes. On demande quel eſt le ſort ou l'eſperance de Pierre pour tel nombre de cartes que ce puiſſe être depuis deux juſqu'à treize.

SOLUTION.

SOIENT les cartes avec leſquelles Pierre fait le parti, repreſentées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Si l'on nomme *m* le nombre des cartes qu'il tient, & *n* le nombre qui exprime tous les arrangemens poſſibles de ces cartes, la fraction $\frac{n}{m}$ exprimera combien de differentes fois chaque lettre occupera chacune des places. Or il faut remarquer que ces lettres ne ſe rencontrent pas toujours à leur place utilement pour le Banquier; par exemple *a*, *b*, *c* ne donne qu'un coup pour gagner à celui qui a la main, quoique chacune des trois lettres y ſoit à ſa place; Et de même *b*, *a*, *c*, *d* ne donne qu'un coup à Pierre pour gagner, quoique chacune des lettres *c* & *d* y ſoit à ſa place. La difficulté de ce Problême conſiſte donc à demêler combien de fois chaque lettre eſt à ſa place utilement pour Pierre, & combien de fois elle y eſt inutilement.

Il ſeroit trop long de mettre en détail les reflexions qui m'ont conduit à la ſolution de ce Problême. Je vas donner d'abord ſuccinctement la ſolution des premiers cas qui ſont les plus ſimples, enſuite je donnerai une formule generale, & je formerai une table qui exprimera le ſort de Pierre dans tous les differens cas, depuis deux cartes juſqu'à treize incluſivement.

PREMIER

PREMIER CAS.

Pierre tient un as & un deux, & parie contre Paul, qu'ayant mêlé ces deux cartes, & nommant un lorsqu'il tirera la premiere, & deux lorsqu'il nommera la seconde, il lui arrivera de tirer un as pour la premiere carte, ou de tirer un deux pour la seconde carte. L'argent du jeu est exprimé par A.

DEux cartes ne peuvent s'arranger que de deux façons differentes : l'une fait gagner Pierre ; l'autre le fait perdre, donc son sort sera $\frac{A+0}{2} = \frac{1}{2}A$.

SECOND CAS.

Pierre tient trois cartes.

SOIENT ces trois cartes representées par les lettres *a*, *b*, *c* : on observera que des six arrangemens differens que ces trois lettres peuvent recevoir, il y en a deux où *a* est à la premiere place ; qu'il y en a un où *b* est à la seconde place, *a* n'étant point à la premiere, & un où *c* est à la troisiéme place, *a* n'étant point à la premiere, & *b* n'étant point à la seconde ; d'où il suit qu'on aura $S = \frac{2}{3}A$; & par consequent que le sort de Pierre est à celui de Paul comme deux est à un.

TROISIE'ME CAS.

Pierre tient quatre cartes.

SOIENT les quatre cartes representées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d* : on observera que des vingt-quatre arrangemens differens que ces quatre lettres peuvent recevoir, il y en a six où *a* occupe la premiere place ; qu'il y en a quatre où *b* est à la seconde, *a* n'étant pas à la premiere ; trois où *c* est à la troisiéme, *a* n'étant pas à la premiere, & *b* n'étant pas à la seconde ; enfin deux où *d* est à la quatriéme, *a* n'étant pas à la premiere, *b* n'étant pas à la seconde, & *c* n'étant pas à la troisiéme ; d'où il suit qu'on

aura le sort de Pierre $= S = \frac{6+4+3+2}{24} A = \frac{15}{24} A = \frac{5}{8} A$; & par consequent que le sort de Pierre est au sort de Paul comme cinq à trois.

QUATRIE'ME CAS.

Pierre tient cinq cartes.

SOIENT les cinq cartes representées par les lettres a, b, c, d, f: on observera que des 120 arrangemens differens que cinq lettres peuvent recevoir, il y en a vingt-quatre où a occupe la premiere place, dix-huit où b occupe la seconde, a n'occupant pas la premiere; quatorze où c est à la troisiéme place, a n'étant pas à la premiere place, ni b à la seconde; onze où d est à la quatriéme place, a n'étant pas à la premiere, ni b à la seconde, ni c à la troisiéme; enfin neuf arrangemens où f est à la cinquiéme place, a n'étant pas à la premiere, ni b à la seconde, ni c à la troisiéme, ni d à la quatriéme; d'où il suit qu'on aura le sort de Pierre $= S = \frac{24+18+14+11+9}{120} A = \frac{76}{120} A = \frac{19}{30} A$; & par consequent que le sort de Pierre est au sort de Paul comme dix-neuf est à onze.

GENERALEMENT.

SI l'on nomme S le sort que l'on cherche, le nombre des cartes que Pierre tient étant exprimé par p; g le sort de Pierre, le nombre des cartes étant $p-1$; d son sort, le nombre des cartes qu'il tient étant $p-2$, on aura $S = \frac{g \times \overline{p-1} + d}{p}$. Cette formule, qui est tres simple & tres generale, donnera sans peine tous les cas, ainsi qu'on les voit resolus dans la Table ci-jointe.

TABLE.

SI $p = 1$, on aura $S = A$.
SI $p = 2$, on aura $S = \frac{1}{2} A$.
Si $p = 3$, on aura $S = \frac{2}{3} A = \frac{1}{2} A + \frac{1}{6} A$.

Si $p = 4$, on aura $S = \frac{1}{8}A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}A$.

Si $p = 5$, on aura $S = \frac{19}{30}A = \frac{1}{2}A + \frac{2}{15}A$.

Si $p = 6$, on aura $S = \frac{91}{144}A = \frac{1}{2}A + \frac{19}{144}A$.

Si $p = 7$, on aura $S = \frac{551}{840}A = \frac{1}{2}A + \frac{111}{840}A$.

Si $p = 8$, on aura $S = \frac{3641}{5760}A = \frac{1}{2}A + \frac{761}{5760}A$.

Si $p = 9$, on aura $S = \frac{28673}{45360}A = \frac{1}{2}A + \frac{5993}{45360}A$.

Si $p = 10$, on aura $S = \frac{28319}{44800}A = \frac{1}{2}A + \frac{5919}{44800}A$.

Si $p = 11$, on aura $S = \frac{2523223}{3991680}A = \frac{1}{2}A + \frac{527383}{3991680}A$.

Si $p = 12$, on aura $S = \frac{302786759}{479001600}A = \frac{1}{2}A + \frac{63285959}{479001600}A$.

Si $p = 13$, on aura $S = \frac{109339663}{172972800}A = \frac{1}{2}A + \frac{22853263}{172972800}A$.

Il eſt aiſé de voir que cette formule donneroit de même l'avantage de Pierre, ſi l'on ſuppoſoit qu'il y eût un plus grand nombre de cartes de differente eſpece.

REMARQUE I.

LA ſolution précedente fournit un uſage ſingulier des nombres figurés, dont je parlerai dans la ſuite, car je trouve en examinant la formule, que le ſort de Pierre eſt exprimé par une ſuite infinie de termes qui ont alternativement + & —, & tels que le numerateur eſt la ſuite des nombres qui compoſent dans la Table, page 80, la colonne perpendiculaire qui répond à p, en commençant par p, & le dénominateur la ſuite des produits $p \times p - 1 \times p - 2 \times p - 3 \times p - 4 \times p - 5$; en ſorte que ces produits qui ſe trouvent dans le numerateur & dans le dénominateur ſe détruiſants, il reſte pour expreſſion du ſort de Pierre cette ſuite très ſimple $\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ + &c. (ces points ſont ici & ſeront dans la ſuite la marque de produits).

Si l'on forme une logarithmique dont la ſoutangente ſoit l'unité, & que l'on prenne deux ordonnées, dont l'une ſoit l'unité, & l'autre ſoit éloignée de cette premiere d'une quantité égale à la ſoutangente, l'excès de l'ordonnée conſtante ſur la derniere ſera égal à cette ſuite.

Pour le démontrer ſoit la formule generale des ſoutangentes $s = \pm \frac{ydx}{dy}$, la ſoutangente étant nommée s, l'abciſſe x, l'ordonnée y. On ſuppoſera y égale à une ſuite d'expoſants de x affectés de coéficients indéterminés, par exemple $y = 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 +$ &c. & prenant de part & d'autre la difference, diviſant enſuite par dx, & multipliant par s, on trouvera $\pm \frac{sdy}{dx} = y = 1 + ax + bxx + cx^3 + dx^4 +$ &c. $= \pm as \pm 2bsx \pm 3csxx \pm 4dsx^3 +$ &c. Si l'on compare les termes omologues de ces deux ſuites, & que l'on tire de cette comparaiſon la valeur des coéficients a, b, c, d, on aura $y = 1 \pm \frac{x}{s} + \frac{1xx}{1.2ss} \pm \frac{1x^3}{1.2.3s^3} + \frac{1x^4}{1.2.3.4s^4} \pm$ &c. ce qui fait voir que ſi l'on détermine y à être l'ordonnée d'une logarithmique dont la ſoutangente conſtante ſoit $= 1$, on aura l'ordonnée qui correſpond à x pris du côté que les ordonnées diminuent, $= 1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} -$ &c. on peut voir cette démonſtration dans les Actes de Leipſic de l'année 1693, p. 179, où le celebre Mr de Leibnitz reſoud ce Problême : *Un logarithme étant donné, trouver le nombre qui lui correſpond.* Or il eſt clair que ſi dans cette ſuite on ſuppoſe $x = 1$, c'eſt à dire égale à la ſoutangente ou à l'ordonnée conſtante, & qu'on retranche cette ſuite de l'unité, elle deviendra la ſuite du preſent Problême.

On peut encore le démontrer plus ſimplement en cette ſorte. Soit conçue une logarithmique dont la ſoutangente ſoit l'unité ; on prendra ſur cette courbe une ordonnée conſtante $= 1$, & une autre ordonnée plus petite $= 1 - y$, l'on nommera x l'abciſſe compriſe entre ces deux ordonnées, on aura $dx = \frac{dy}{1-y}$, & $x = y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 +$ &c. & par la methode pour le retour des ſuites, $y = x - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} -$ &c. ce qui, en ſuppoſant $x = 1$, devient $= 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} -$ &c. *C. Q. F. D.*

REMARQUE II.

QUOIQUE la ſuite du Problême ſoit compoſée d'un nombre infini de termes, elle n'eſt point égale à l'unité; on trouvera même qu'elle ne ſera jamais ſi grande que $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, excepté le ſeul cas où il y a trois cartes, en ſorte que les limites de la ſuite ſont entre $\frac{10}{16}$ & $\frac{19}{30}$. On pourra encore les trouver plus juſtes ſi l'on ajoute en une même ſomme un plus grand nombre des termes de la ſuite, ce qui ſe fait ſans peine, en employant la Table des logarithmes; & ainſi l'excès ou le défaut de cette ſomme ſur la valeur de la ſuite diminuera à l'infini.

On peut obſerver que la ſuite

B $\frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$

eſt égale à chacune des trois qui ſuivent C, D, F, leſquelles ſous des formes tres differentes ne laiſſent pas d'avoir la même valeur, en ſorte que tout ce qui convient à la ſuite B leur convient auſſi.

C $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2.3.4.5} + \frac{25}{1.2.3.4.5.6} + \frac{36}{1.2.3.4.5.6.7}$
$+ \&c. - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$
$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} + \&c.$

D $\frac{1}{2} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{7}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$
$+ \&c.$

F $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$
$- \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.5.6} - \frac{1}{3.4.5.6.7.8} - \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} - \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} - \&c.$

On pourroit faire pluſieurs remarques curieuſes par raport à ces ſuites; mais cela nous écarteroit de nôtre ſujet, & nous meneroit trop loin.

On a ſuppoſé dans ce Problême, que Pierre ayant gagné ou perdu, le jeu finiſſoit. Mais ſi l'on ſuppoſoit, ainſi qu'il ſe pratique dans le jeu du Treize, que Paul ayant perdu une fois, remît encore au jeu, & qu'ayant perdu une ſeconde fois, il remît encore la même ſomme au jeu, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que Pierre eût perdu en tirant toutes ſes cartes ſans en nommer une ſeule à ſon rang: Ce ſeroit un

nouveau Problême qui auroit plus de difficulté que celui dont on vient de donner une solution generale, & qui auroit plus de raport au jeu du Treize. En voici les cas les plus simples.

PROBLÊME.

PROPOSITION VIII.

Pierre joue contre Paul aux mêmes conditions qu'au jeu du Treize ci-dessus expliqué, avec cette seule difference, qu'au lieu qu'au jeu du Treize Pierre joue avec un jeu de cinquante-deux cartes, composé de quatre as, quatre deux, quatre trois, &c. ici Pierre ne joue qu'avec treize cartes, sçavoir un as, un deux, un trois, un quatre, &c. jusqu'au Roy inclusivement.

PREMIER CAS.

Pierre tient un as & un deux.

JE suppose que Pierre & Paul mettent chacun au jeu une certaine somme que je nomme A, j'exprime les deux cartes par deux lettres, sçavoir l'as par la lettre a, & le deux par la lettre b. Cela posé, j'examine ce que les deux arrangemens differens, $a\,b$, $b\,a$ donnent à Pierre. Or je vois que l'arrangement $b\,a$ fait perdre Pierre, & que l'autre arrangement $a\,b$ le met dans une situation que je vois à la verité lui être favorable, mais qui m'est encore inconnue, puisque Pierre pour achever est obligé de mêler les cartes & de retirer. Or en retirant il peut également lui arriver ou de reperdre ce qu'il auroit déja gagné si les cartes se trouvent arrangées ainsi que le represente l'arrangement $a\,b$, ou de gagner de nouveau $2A$ avec le droit de recommencer si les cartes sont disposées ainsi que le represente l'arrangement $b\,a$, car dans cette disposition il gagneroit par b ayant à nommer un deux, & ensuite par a ayant à nommer un as, & il auroit encore le droit de continuer le jeu après avoir mêlé de nouveau les cartes.

Nommant donc S le sort cherché de Pierre, x son sort

lorſqu'il a amené pour premiere carte un as, on aura $S = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times 0$, $x = \frac{1}{2} \times \overline{4A + S} + \frac{1}{2} \times A$, d'où l'on tire $S = \frac{4}{3}A$; ce qui fait voir que dans la ſuppoſition de ce premier cas l'avantage de Pierre ſeroit exprimé par $\frac{2}{3}A$.

SECOND CAS.

Pierre tient un as, un deux & un trois.

EXPRIMANT comme ci-deſſus l'as, le deux & le trois par les lettres a, b, c, & le ſort cherché de Pierre par S, je range pour me faire entendre en moins de paroles & plus facilement, les ſix arrangemens differens que ces trois lettres peuvent recevoir ſur trois colonnes, & je mets à côté ce que chacun de ces arrangemens donne à à Pierre de gain, de perte, ou d'eſperance. Or il y en a qui laiſſent la fortune de Pierre indéciſe. Pierre étant obligé pour achever, de mêler les cartes, & de continuer à tirer ou une carte s'il lui reſte trois à nommer, ou deux cartes s'il lui reſte deux & trois à nommer. En ce cas j'exprime le ſort de Pierre par une variable, & pour la déterminer je remets de nouveau ces mêmes arrangemens, & j'exprime à côté ce que chacun donne à Pierre. Il ſeroit trop long de rendre raiſon de tout en détail, il ſuffira au Lecteur de regarder la Table, & de conſiderer avec attention ſi la valeur de chaque arrangement eſt bien déterminée.

$x.abc$	$2A + S.bac$	$0.cab$
$3A + S.acb$	$0.bca$	$3A + S.cba$

Je nomme x le ſort de Pierre lorſque ſes cartes ſe ſont trouvées diſpoſées ainſi que le repreſente l'arrangement abc. Pour le déterminer je fais cette nouvelle Table,

$A.abc$	$A.bac$	$y.cab$
$A.acb$	$A.bca$	$A + x.cba$

Je nomme y le ſort de Pierre lorſque ſes cartes s'étant trouvées d'abord diſpoſées ainſi que le repreſente l'arrangement abc, elles le ſont à la ſeconde fois, ainſi que le repreſente l'arrangement cab.

Pour déterminer cette inconnue je fais cette troiſiéme Table.

$3A.abc$	$2A+y.bac$	$3A.cab$
$A+y.acb$	$3A+x.bca$	$3A.cba$

De tout cela on tire

$$S=\frac{1\times\overline{2A+S}+2\times\overline{3A+S}+2\times 0+1\times x}{6}=\frac{8A+3S+x}{6}$$

$$x=\frac{5A+x+y}{6}.$$

$$y=\frac{3\times 3A+1\times 3A+2y+y+1\times 3A+x}{6}=\frac{15A+2y+x}{6}=\frac{15A+x}{4};$$

Et ſubſtituant cette valeur de y dans l'égalité $x=\frac{5A+x+y}{6}$, on aura $x=\frac{5A+x\ \frac{15A+x}{4}}{6}$; ce qui donne $x=\frac{35}{19}A$. Et ſubſtituant cette valeur de x dans l'égalité $S=\frac{8A+3S+x}{6}$, on aura $S=\frac{8A+3S+\frac{35}{19}A}{6}=\frac{152A+57S+35A}{114}$.

Et enfin $S=\frac{187}{57}A=3A+\frac{16}{57}A$. D'où il paroît que l'avantage de Pierre ſeroit $2A+\frac{16}{57}A$. En ſorte que ſi A exprime une piſtolle, c'eſt à dire, ſi Paul s'oblige à mettre au jeu une piſtolle contre Pierre, juſqu'à ce que Pierre perdant, le jeu ſoit fini; l'avantage qu'il fait à Pierre, & la perte qu'il ſouffre en tenant ce parti, eſt la même que s'il donnoit à Pierre en pur don vingt-deux livres ſeize ſols & quelques deniers.

Cette methode eſt generale; mais comme la longueur du calcul la rend impraticable lorſqu'il y a un plus grand nombre de cartes, on ne doit s'en contenter que par proviſion en attendant qu'on en ait trouvé une meilleure.

PROBLÊMES SUR LE JEU DE LA BASSETE.

EXPLICATION DES REGLES.

A Ce Jeu, comme à celui du Pharaon, le Banquier tient un Jeu entier composé de cinquante-deux cartes. Après qu'il les a mêlées, & que chaque Joueur ou Ponte a mis une certaine somme sur une carte prise à volonté, le Banquier tourne le jeu, mettant le dessous dessus, en sorte qu'il voit la carte de dessous. En suite il tire toutes ses cartes deux à deux jusqu'à la fin du jeu, en commençant par la seconde. Voici les autres regles du jeu.

1°. La premiere carte est pour le Banquier, mais il ne prend que les deux tiers de la mise du Ponte lorsqu'il amene sa carte, & cela s'appelle *facer*. La seconde est entierement pour le Ponte; la troisiéme entierement pour le Banquier; & ainsi de suite alternativement. Il faut remarquer que lorsqu'une carte a gagné ou perdu, elle n'appartient plus au jeu, à moins qu'on ne la remette de nouveau. Ainsi, par exemple, la carte du Ponte étant un Roy, si la premiere carte du jeu est une Dame, la seconde un Roy, & la troisiéme aussi un Roy, le Banquier qui dit en tirant les cartes, *Roy a gagné, Roy a perdu* (cela s'entend des Pontes) perdra la mise du Ponte, quoique naturellement le second Roy l'eût fait gagner, si la premiere carte de la taille n'eût point été un Roy.

2°. Quand les Pontes veulent prendre une carte dans le cours du jeu, il faut que la taille soit basse, c'est à dire, que le Banquier les tirant, comme j'ai dit deux à deux, ait

posé sa derniere taille ou couple de cartes sur le tapis, en sorte que la carte qui reste découverte soit perdante pour les Pontes. Alors si un Ponte prend une carte, la premiere carte que tirera le Banquier sera nulle à l'égard de ce Ponte, quoiqu'elle soit favorable aux autres Joueurs; si elle vient la seconde, elle sera facée, c'est à dire que le Banquier prendra les $\frac{2}{3}$ de ce que ce Ponte aura mis sur la carte: si elle vient dans la suite; elle sera en pur gain ou en pure perte pour le Banquier, selon qu'elle viendra, ou la premiere, ou la seconde d'une taille.

3°. La derniere carte, qui devroit être pour le Ponte, est nulle.

PROPOSITION IX.

PREMIER CAS.

L'on suppose que le Banquier ayant six cartes entre les mains, le Ponte en prenne une qui soit une fois dans ces six cartes, c'est à dire dans les cinq cartes couvertes. On demande quel est le sort du Banquier par raport à cette carte du Ponte. Par exemple si le Ponte met un écu sur sa carte, on demande à quelle partie de l'écu peut s'évaluer l'avantage du Banquier.

SOIT le sort cherché exprimé par S, & la mise de Paul par A.

Si l'on conçoit les cent vingt arrangemens differens que cinq cartes exprimées par les lettres a, b, c, d, f, peuvent recevoir, posés sur cinq colonnes, de vingt-quatre arrangemens chacune; on remarquera, 1°, que celle où la lettre a occupe la premiere place, donne A au Banquier. 2°. Que dans chacune des quatre autres colonnes, la lettre a se trouve six fois à la troisiéme place, six fois à la quatriéme, & six fois à la cinquiéme, d'où il suit qu'on aura $S = \frac{24 \times A + 4 \times 6 \times \frac{5}{3} A + 6 \times 2A + 6 \times 0 + 6 \times A}{120}$ $= \frac{176}{120} = A + \frac{2}{15} A$; & par conséquent si A designe un écu valant soixante sols, Paul prenant une carte, dans les con-

ditions du preſent Problême, feroit à Pierre le même avantage que s'il lui donnoit huit ſols en pur don.

On peut encore conſiderer la choſe autrement en prenant garde que de ces cinq colonnes, la premiere donnera $24A$, la ſeconde $24 \times \frac{1}{2}A$, la troiſiéme 24×0, la quatriéme $24 \times 2A$, & la cinquiéme $24A$.

GENERALEMENT.

SI la carte que prend le Ponte n'eſt qu'une fois parmi les cartes couvertes du Banquier dont le nombre ſoit exprimé par p, on aura $S = \frac{3Ap + 2A}{3p}$.

SECOND CAS.

L'on ſuppoſe que le Banquier tenant ſix cartes, le Ponte en prend une. Or comme la carte du Ponte ſe peut trouver ou deux fois, ou trois fois, ou quatre fois dans ces ſix cartes, & que cela diverſifie l'avantage du Banquier, il eſt à propos de chercher quel eſt ſon ſort dans toutes les variations de ce ſecond cas. Je commencerai par examiner quel eſt ſon ſort dans la ſuppoſition que la carte du Ponte ſoit deux fois dans la main du Banquier.

SOIENT les cinq cartes couvertes du Banquier deſignées par les lettres a, b, c, d, f, dont deux quelconques, par exemple a & f, expriment celle du Ponte. On remarquera, 1°, que les cent vingt differens arrangemens poſſibles que les cinq cartes peuvent recevoir, étant poſés ſur cinq colonnes de vingt-quatre arrangemens chacune, dont la premiere commence par a, la ſeconde par b, la troiſiéme par c, &c. les deux colonnes qui commencent par a & par f donnent A au Banquier, puiſqu'elles ſont indifferentes pour le Banquier & pour le Ponte. 2°. Que chacune des trois autres colonnes contient douze arrangemens qui donnent au Banquier $\frac{1}{2}A$, ce ſont ceux où a & f ſont à la deuxiéme place; & quatre arrangemens qui donnent $2A$ au Ban-

quier, c'eſt à dire qui le font gagner. Cela ſe découvrira aiſément par la Table ci-jointe qui repreſente la ſeconde colonne, qui eſt celle où *b* tient la premiere place.

bacdf	*bcadf*	*bdacf*	*bfadc*
bacfd	*bcafd*	*bdafc*	*bfacd*
badcf	*bcdaf*	*bdcaf*	*bfcad*
badfc	*bcdfa*	*bdcfa*	*bfcda*
bafcd	*bcfad*	*bdfac*	*bfdac*
bafdc	*bcfda*	*bdfca*	*bfdca*

Il eſt clair que la premiere & la derniere de ces quatre colonnes donnent $\frac{1}{3}A$ au Banquier, & que chacune des deux autres contient deux arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier; ce ſont ceux-ci, *bcdaf*, *bcdfa*, *bdcaf*, *bdcfa*. On aura donc

$$S=\frac{2\times 24A+3\times 2\times 6\times\frac{1}{3}A+2\times 2\times 2A}{120}=\frac{11}{10}A=A+\frac{1}{10}A$$

2°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt trois fois dans les cinq cartes du Banquier. On obſervera que des cinq colonnes ſuſdites il y en a trois qui donnent A au Banquier, & deux qui contiennent chacune dix-huit arrangemens qui donnent $\frac{1}{3}A$ au Banquier. Cela n'a pas beſoin de preuve. On aura donc $S=\frac{3\times 24A+2\times 18\times\frac{1}{3}A}{120}=\frac{132}{120}A=A+\frac{1}{10}A.$

3°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt quatre fois dans les cinq cartes couvertes du Banquier, on obſervera que des cinq colonnes ſuſdites il y en a quatre qui donnent A au Banquier, & une qui lui donne $\frac{1}{3}A$. On aura donc

$$S=\frac{4\times 24A+24\times\frac{1}{3}A}{120}=A+\frac{2}{15}A.$$

TROISIE'ME CAS.

L'on ſuppoſe que le talon étant compoſé de huit cartes, dont la premiere eſt découverte, le Ponte en prend une qui ſoit deux fois dans ces huit cartes. On demande quel eſt le ſort du Banquier par raport à cette carte.

SOIENT exprimées les ſept cartes couvertes par les ſept lettres *a, b, c, d, f, g, h*, dont deux, ſçavoir *a* & *f*, deſignent celle du Ponte. Soit auſſi, comme ci-devant, *S* le ſort cherché, & *A* la miſe de Paul. Cela poſé,

On obſervera, 1°, que poſant les cinq mil quarante arrangemens differens que les ſept lettres peuvent recevoir ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune, la colonne qui commence par *a* & celle qui commence par *f*, donneront chacune *A* au Banquier. 2°. Que ſi l'on conçoit chacune des cinq autres partagée de nouveau en ſix autres de cent vingt arrangemens chacune, les deux d'entre ces ſix où *a* & *f* occupent la ſeconde place, donneront $\frac{5}{7}$ *A* au Banquier. 3°. Que les quatre autres colonnes d'entre ces ſix ont chacune quarante-huit arrangemens qui donnent 2*A* au Banquier. Pour le voir aiſément il faut ſuppoſer qu'une des cinq colonnes ſubdiviſée en ſix autres, eſt celle qui commence par *b*, & conſulter la Table qui a ſervi à la ſolution du cas précedent. On remarquera d'abord que la premiere & la derniere colonne de cette Table étant variée autant qu'il eſt poſſible avec les deux nouvelles lettres *g* & *h*, *a* reſtant à la ſeconde place, elles fourniront chacune cent vingt arrangemens qui donneront $\frac{5}{7}$ *A* au Banquier. A l'égard des quatre autres colonnes de cent vingt arrangemens chacune, dans leſquelles les lettres *c, d, g, h* occuperoient la ſeconde place après *b*, il eſt aiſé de voir qu'il ſuffit d'en examiner une, puiſque toutes les quatre donnent le même ſort au Banquier. Soit la colonne troiſiéme de la Table celle que l'on veut examiner: Il faut prendre garde que chacun des quatre arrangemens *bcadf, bcafd, bcfad, bcfda* étant variés avec les

deux nouvelles lettres *g* & *h*, autant qu'il eſt poſſible, en ſorte neanmoins que *c* reſte à la ſeconde place, c'eſt à dire immédiatement après *b*, donnent ſix nouveaux arrangemens qui font gagner le Banquier, & lui donnent 2*A*. Par exemple *bcadf* fournit ceux-ci,

bcgadfh	*bchadfg*
bcgadhf	*bchagfd*
bcgahdf	*bchafgd*

Il en eſt ainſi des trois autres, puiſque *g* étant devant *a* ou *f*, ſe peut trouver en trois differentes places; & que *h* étant devant *a* ou *f*, ſe peut trouver en trois places differentes, *a* ou *f* reſtans toujours à la quatriéme.

On trouvera de même que les deux arrangemens *bcdaf*, *bcdfa* étant variés autant qu'il eſt poſſible avec *g* & *h*, en ſorte neanmoins que *c* ſoit toujours à la ſeconde place, fourniſſent chacun douze arrangemens qui donnent 2*A* au Banquier, car dans *bcdaf*, *g* & *h* peuvent s'arranger en ſix façons avec *d*, & en ſix façons differentes avec *f*, *a* reſtant à la quatriéme place; & de même dans *bcdfa*, *g* & *h* peuvent s'arranger en ſix façons avec *d*, & en ſix façons differentes avec *a*, *f* reſtant toujours à la quatriéme place. De tout cela il ſuit qu'on aura

$$S = \frac{2 \times 720A + 5 \times 2 \times 120 \times \frac{5}{3}A + 4 \times 48 \times 2A}{5040} = \frac{536}{504}A$$

$$= A + \frac{4}{63}A.$$

2°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque la carte que prend le Ponte eſt trois fois dans les ſept cartes couvertes du Banquier.

Soient exprimées comme ci-devant les ſept cartes du Banquier par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, dont trois quelconques, par exemple *a*, *d*, *f*, deſignent la carte du Ponte. Cela poſé,

On obſervera, 1°, que poſant les cinq mil quarante arrangemens differens que les ſept lettres peuvent recevoir ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune, les trois qui commencent par les lettres *a*, *d*, *f* donnent *A*

au Banquier, ce qui eſt évident. 2°. Que diſtribuant chacune des quatre autres en ſept colonnes de cent vingt arrangemens chacune, les trois colonnes d'entre ces ſix où les lettres a, d, f tiendront la ſeconde place, donnent $\frac{5}{7}A$ au Banquier. 3°. Que chacune des trois autres colonnes contiendra trente ſix arrangemens qui donneront $2A$ au Banquier. Pour s'en aſſurer, on peut conſulter la Table de la page 68, & remarquer que chacun des arrangemens de la ſeconde colonne de la Table, où b eſt à la premiere place, & c à la ſeconde, ne peut par le mêlange des deux nouvelles lettres g & h, recevoir que ſix arrangemens qui donnent $2A$ au Banquier, les deux premieres reſtant à leur place. Ce qui paroîtra évident, ſi l'on conſidere que dans les ſix arrangemens

bcadf	*bcdaf*	*bcfad*
bcafd	*bcdfa*	*bcfda*

g ou h étant devant l'une des trois lettres a, d, f, h ou g peuvent s'arranger en trois façons differentes avec les deux dernieres.

Il eſt viſible qu'il en ſeroit de même des trois autres colonnes de cent vingt arrangemens où les deux premieres lettres ſeroient bd, bg, bh. De tout cela il ſuit qu'on aura

$$S = \frac{3 \times 720 + 4 \times 3 \times 120 \times \frac{5}{7}A + 3 \times 36 \times 2A}{5040} = A + \frac{8}{105}A.$$

3°. Pour trouver quel eſt le ſort du Banquier lorſque le talon étant compoſé de ſept cartes couvertes, le Ponte en prend une qui eſt quatre fois dans ces ſept cartes; on obſervera, 1°, que concevant les cinq mil quarante arrangemens poſſibles de ſept cartes poſés ſur ſept colonnes de ſept cens vingt arrangemens chacune, dont l'une commence par a, la ſeconde par b, &c. comme ci-devant, il y en aura quatre de ces ſept qui donneront A au Banquier. 2°. Que diſtribuant chacune des trois autres ſur ſix colonnes de cent vingt arrangemens chacune, quatre de ces ſix fourniront chacune cent vingt arrangemens qui donneront $\frac{5}{7}A$ au

Banquier, & les deux autres vingt-quatre arrangemens chacune qui lui donneront $2A$. On aura donc

$$S = \frac{4\times 720A + 3\times 4\times 120\times\frac{5}{3}A + 2\times 24\times 2A}{5040} = A + \frac{11}{105}A.$$

Il ſeroit inutile de pourſuivre en détail la ſolution d'un plus grand nombre de cas. On voit aſſez par les reflexions précedentes, quelles ſeroient celles qu'il faudroit faire dans la ſuppoſition que le Banquier ayant neuf cartes couvertes, le Ponte en prît une. Ainſi, 1°, on trouvera que ſi la carte du Ponte eſt deux fois dans ces neuf cartes, on aura $S = \frac{2\times 40320A + 7\times 2\times 5040\times\frac{5}{3}A + 6\times 2160\times 2A}{5040\times 8\times 9}$

$= \frac{379680}{362880} = A + \frac{5}{108}A.$

2°. Si la carte du Ponte eſt trois fois dans les neuf cartes du Banquier, on aura

$$S = \frac{3\times 40320A + 6\times 3\times 5040\times\frac{5}{3}A + 5\times 9360\times 2A}{362880}$$

$= \frac{284480}{362880}A = A + \frac{5}{84}A.$

3°. Enfin ſi la carte du Ponte eſt quatre fois dans ces neuf cartes, on aura

$$S = \frac{4\times 40320A + 5\times 4\times 5040\times\frac{5}{3}A + 4\times 1584\times 2A}{362880}$$

$= \frac{392640}{362880}A = A + \frac{11}{378}A.$

On trouvera aiſément dans les reflexions précedentes & dans l'ordre des chiffres l'origine & la démonſtration des formules $B = \frac{1}{3}\times\frac{p+1}{pp-p}$, $C = \frac{pp-2p-3}{2p^3-6pp+4p}$, $D = \frac{2^{pp}-3^p-11}{3p^3-9pp+6p}$, dans leſquelles p deſignant le nombre de cartes couvertes que tient le Banquier, B exprime ſon avantage lorſque la carte du Ponte ſe trouve deux fois dans le talon, C ſon avantage lorſqu'elle y eſt trois fois, D ſon avantage lorſqu'elle y eſt quatre fois.

Ces formules ſont aſſez commodes pour le calcul, mais elles ſont particulieres & limitées; en voici deux autres très univerſelles, qui auroient lieu, par exemple, ſi le Banquier tailloit avec deux ou trois jeux de cartes mêlés enſemble.

GENERALEMENT.

QUELQUE nombre de cartes que tienne le Banquier, & quelque nombre de fois que celle du Ponte y ſoit contenue, ſi l'on nomme p le nombre des cartes couvertes que tient le Banquier; q le nombre de fois que celle du Ponte y eſt contenue, on aura le ſort du Banquier exprimé par cette formule generale,

$$S = \frac{q}{p}A + \frac{q \times p-q}{p \times p-1} \times \frac{5}{3}A + \frac{q \times p-q \times p-q-1 \times p-q-2}{p \times p-1 \times p-2 \times p-3} \times 2A$$
$$+ \frac{q \times p-q \times p-q-1 \times p-q-2 \times p-q-3 \times p-q-4}{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4 \times p-5} \times 2A$$
$$+ \frac{q \times p-q \times p-q-1 \times p-q-2 \times p-q-3 \times p-q-4 \times p-q-5 \times p-q-6}{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4 \times p-5 \times p-6 \times p-7} \times 2A$$
$$+ \frac{q \times p-q \times p-q-1 \times p-q-2 \times p-q-3 \times p-q-4 \times p-q-5 \times p-q-6 \times p-q-7 \times p-q-8}{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4 \times p-5 \times p-6 \times p-7 \times p-8 \times p-9} \times 2A$$
$$+ \&c.$$

Il eſt facile de continuer cette formule, & de découvrir tous les termes de cette ſuite, à commencer depuis le troiſiéme.

Pour avoir le ſort du Banquier on employera tous les termes de cette ſuite juſqu'à ce qu'on en vienne à un terme qui ſoit $= 0$; mais il faut obſerver que lorſque la carte du Ponte n'eſt qu'une fois dans le talon, il faut ajouter $\frac{q}{p}A$ aux termes de la ſuite.

AUTRE FORMULE.

SI l'on nomme g le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p-2$, & le reſte comme ci-deſſus, on aura generalement

$$S = \frac{q}{p}A + \frac{p-q}{p} \times \frac{q}{p-1} \times \frac{5}{3}A + \frac{q \times p-q \times p-q-1 \times p-q-2}{p \times p-1 \times p-2 \times p-3} 2A$$
$$+ \frac{p-q \times p-q-1}{p \times p-1} \times g - 1 \times \frac{q}{p-2}A - \frac{p-q-2}{p-2 \times p-3} \times q \times \frac{5}{3}A.$$

REMARQUE I.

AU Jeu comme à celui du Pharaon, le plus grand avantage du Banquier eſt quand le Ponte prend une carte qui n'a point paſſé, & ſon moindre avantage eſt quand le Ponte en prend une qui a paſſé deux fois; ſon

avantage eſt auſſi plus grand lorſque la carte du Ponte a paſſé trois fois, que lorſqu'elle a paſſé ſeulement une fois.

REMARQUE II.

AU Jeu de la Baſſete l'avantage du Banquier eſt moindre qu'au Jeu du Pharaon, ce que l'on reconnoîtra aiſément en comparant l'avantage du Banquier au Jeu de la Baſſete, lorſque tenant douze cartes le Ponte en prend une qui s'y trouve ou une, ou deux, ou trois, ou quatre fois, avec ſon ſort dans ce même cas au Jeu du Pharaon.

L'on trouvera que le Ponte mettant une piſtolle ſur ſa carte à la Baſſete, l'avantage du Banquier ſera 13 ſ. 4 d. lorſque la carte du Ponte ſera quatre fois dans les douze cartes du Banquier, 12 ſ. 1 d. lorſqu'elle y ſera une fois, 9 ſ. 8 d. lorſqu'elle y ſera trois fois, & 7 ſ. 3 d. lorſqu'elle y ſera deux fois; au lieu qu'au Pharaon l'avantage eſt 19 ſ. 2 d. $\frac{10}{11}$ dans le premier cas, 16 ſ. 8 d. dans le ſecond, 13 ſ. 7 $\frac{7}{11}$ d. dans le troiſiéme, & 10 ſ. 7 $\frac{3}{11}$ d. dans le quatriéme; ce qui donne 3 liv. 1 denier d'avantage au Banquier pour les quatre cas, au lieu qu'à la Baſſete les quatre enſemble ne donnent que 2 liv. 2 ſ. 4 den. ce qui n'eſt à peu près que les deux tiers de l'avantage du Banquier au Jeu du Pharaon.

REMARQUE III.

CE Jeu eſt preſentement beaucoup moins en uſage que le Pharaon. Les cartes qui ne vont pas, font perdre au Jeu quelque choſe de ſa vivacité. D'ailleurs il y a ſouvent des diſputes pour ſçavoir ſi la carte du Ponte va ou ne va pas. On ne peut remedier à ces inconveniens, qui ſont fondés ſur la nature du Jeu: mais on pourroit rendre ce Jeu plus égal en convenant que les cartes facées ne payaſſent que la moitié de la miſe du Ponte, alors l'avantage du Banquier ſeroit fort peu conſiderable; j'ai trouvé que ſi le Banquier ne prenoit qu'un tiers pour les faces, ce Jeu lui ſeroit deſavantageux. La pluſpart des Remarques qu'on a faites ſur le Jeu du Pharaon, peuvent avoir lieu à l'égard de celui-ci, & il ne ſera pas inutile de les conſulter.

$$+\frac{q\times p-q\times p-q-1\times p-q-2\times p-q-3\times p-q-4\times p-q-5\times p-q-6}{p\times p-1\times p-2\times p-3\times p-4\times p-5\times p-6\times p-7}\times 2A$$

$$+\frac{q\times p-q\times p-q-1\times p-q-2\times p-q-3\times p-q-4\times p-q-5\times p-q-6\times p-q-7\times p-q-8}{p\times p-1\times p-2\times p-3\times p-4\times p-5\times p-6\times p-7\times p-8\times p-9}\times 2A$$

+ &c.

Il eſt facile de continuer cette formule, & de découvrir tous les termes de cette ſuite, à commencer depuis le troiſiéme.

AUTRE FORMULE.

SI l'on nomme g le ſort du Banquier dans un nombre de cartes exprimé par $p-2$, & le reſte comme ci-deſſus, on aura

$$S=\frac{q}{p}A+\frac{p-q}{p}\times\frac{q}{p-1}\times\frac{5}{3}A+\frac{q\times p-q\times p-q-1\times p-q-2}{p\times p-1\times p-2\times p-3}2A$$

$$+\frac{p-q\times p-q-1}{p\times p-1}\times g-1\times\frac{q}{p-2}A-\frac{p-q-2}{p-2\times p-3}\times q\times\frac{5}{3}A.$$

REMARQUE.

CE Jeu, comme à celui du Pharaon, le plus grand avantage du Banquier eſt quand le Ponte prend une carte qui n'a point paſſé, & ſon moindre avantage eſt quand le Ponte en prend une qui a paſſé deux fois; ſon avantage eſt auſſi plus grand lorſque la carte du Ponte a paſſé trois fois que lorſqu'elle a paſſé ſeulement une fois.

Il faut auſſi remarquer qu'à ce jeu l'avantage du Banquier eſt moindre qu'au jeu du Pharaon, ce que l'on reconnoîtra aiſément en comparant l'avantage du Banquier au jeu de la Baſſete, lorſque tenant douze cartes le Ponte en prend une qui s'y trouve ou une, ou deux, ou trois, ou quatre fois, avec ſon ſort dans ce même cas au jeu du Pharaon; car l'on trouvera que le Ponte mettant une piſtolle ſur ſa carte à la Baſſete, l'avantage du Banquier ſera 13 ſ. 4 d. lorſque la carte du Ponte ſera quatre fois dans les douze cartes du Banquier, 12 ſ. 1 d. lorſqu'elle y ſera une fois, 9 ſ. 8 d. lorſqu'elle y ſera trois fois, & 7 ſ. 3 d. lorſqu'elle y ſera deux fois; au lieu qu'au Pharaon l'avan-

rage eſt 19 ſ. 2 d. $\frac{10}{33}$ dans le premier cas, 16 ſ. 8 d. dans le ſecond, 13 ſ. 7 $\frac{7}{11}$ d. dans le troiſiéme, & 10 ſ. 7 $\frac{3}{11}$ d. dans le quatriéme; ce qui donne 3 liv. 0 1 den. d'avantage au Banquier pour les quatre cas, au lieu qu'à la Baſſete les quatre enſemble ne donnent que 2 liv. 2 ſ. 4 d. ce qui n'eſt à peu près que les deux tiers de l'avantage du Banquier au jeu du Pharaon. On pourra faire ſur la Table ci jointe, pluſieurs remarques pareilles à celles qu'on a faites ſur les deux Tables qui ſervent au jeu du Pharaon.

TABLE POUR LA BASSETE

vis a vis la pag. 74.

$1 = a + \frac{2}{15}a$	$2 = a + \frac{1}{10}a$	$3 = a + \frac{1}{10}a$	$4 = a + \frac{2}{15}a$
$1 = a + \frac{2}{21}a$	$2 = a + \frac{4}{63}a$	$3 = a + \frac{8}{105}a$	$4 = a + \frac{11}{105}a$
$1 = a + \frac{2}{27}a$	$2 = a + \frac{5}{108}a$	$3 = a + \frac{5}{84}a$	$4 = a + \frac{31}{378}a$
$1 = a + \frac{2}{33}a$	$2 = a + \frac{2}{55}a$	$3 = a + \frac{8}{165}a$	$4 = a + \frac{11}{165}a$
$1 = a + \frac{2}{39}a$	$2 = a + \frac{7}{234}a$	$3 = a + \frac{35}{858}a$	$4 = a + \frac{40}{715}a$
$1 = a + \frac{2}{45}a$	$2 = a + \frac{8}{315}a$	$3 = a + \frac{16}{455}a$	$4 = a + \frac{197}{4095}a$
$1 = a + \frac{2}{51}a$	$2 = a + \frac{3}{136}a$	$3 = a + \frac{21}{680}a$	$4 = a + \frac{129}{3060}a$
$1 = a + \frac{2}{57}a$	$2 = a + \frac{10}{513}a$	$3 = a + \frac{80}{2907}a$	$4 = a + \frac{109}{2907}a$
$1 = a + \frac{2}{63}a$	$2 = a + \frac{11}{630}a$	$3 = a + \frac{33}{1330}a$	$4 = a + \frac{202}{5985}a$
$1 = a + \frac{2}{69}a$	$2 = a + \frac{12}{759}a$	$3 = a + \frac{120}{1711}a$	$4 = a + \frac{163}{5313}a$
$1 = a + \frac{2}{75}a$	$2 = a + \frac{13}{900}a$	$3 = a + \frac{153}{6900}a$	$4 = a + \frac{291}{10350}a$
$1 = a + \frac{2}{81}a$	$2 = a + \frac{14}{1053}a$	$3 = a + \frac{56}{2925}a$	$4 = a + \frac{633}{26325}a$
$1 = a + \frac{2}{87}a$	$2 = a + \frac{15}{1218}a$	$3 = a + \frac{195}{10962}a$	$4 = a + \frac{44}{1827}a$
$1 = a + \frac{2}{93}a$	$2 = a + \frac{16}{1395}a$	$3 = a + \frac{224}{13485}a$	$4 = a + \frac{101}{4495}a$
$1 = a + \frac{2}{99}a$	$2 = a + \frac{17}{1584}a$	$3 = a + \frac{85}{5456}a$	$4 = a + \frac{517}{24552}a$
$1 = a + \frac{2}{105}a$	$2 = a + \frac{18}{1785}a$	$3 = a + \frac{288}{19635}a$	$4 = a + \frac{389}{19635}a$
$1 = a + \frac{2}{111}a$	$2 = a + \frac{19}{1998}a$	$3 = a + \frac{323}{23310}a$	$4 = a + \frac{218}{11655}a$
$1 = a + \frac{2}{117}a$	$2 = a + \frac{20}{2223}a$	$3 = a + \frac{120}{9139}a$	$4 = a + \frac{1457}{82251}a$
$1 = a + \frac{2}{123}a$	$2 = a + \frac{21}{2460}a$	$3 = a + \frac{399}{31980}a$	$4 = a + \frac{269}{15990}a$
$1 = a + \frac{2}{129}a$	$2 = a + \frac{22}{2709}a$	$3 = a + \frac{440}{37023}a$	$4 = a + \frac{593}{37023}a$
$1 = a + \frac{2}{135}a$	$2 = a + \frac{23}{2970}a$	$3 = a + \frac{161}{14190}a$	$4 = a + \frac{976}{63855}a$
$1 = a + \frac{2}{141}a$	$2 = a + \frac{24}{3243}a$	$3 = a + \frac{528}{48645}a$	$4 = a + \frac{711}{48645}a$
$1 = a + \frac{2}{147}a$	$2 = a + \frac{25}{3528}a$	$3 = a + \frac{575}{55272}a$	$4 = a + \frac{129}{9212}a$
$1 = * \ * \ *$	$2 = * \ * \ *$	$3 = a + \frac{208}{20825}a$	$4 = a + \frac{2519}{187425}a$
$1 = * \ * \ *$	$2 = * \ * \ *$	$3 = a * \ * \ *$	$4 = a + \frac{2453842}{17559223}a$

PROBLÊMES SUR LE PIQUET, L'OMBRE, LA TRIOMPHE, LE BRELAN ET L'IMPERIALE.

AVERTISSEMENT.

LORSQUE le hazard regne abſolument dans un jeu, on peut toujours déterminer l'avantage ou le deſavantage des joueurs ; les Problêmes précedents en peuvent ſervir de preuve ; & ſi l'on fait attention à la varieté des conditions de ces jeux, & au grand nombre de circonſtances auſquelles il a fallu avoir égard, on reconnoîtra que la plûpart des autres jeux de pur hazard, qu'on connoît ou qu'on peut imaginer, ſe détermineront par des methodes ou ſemblables, ou peu differentes de celles qui ont ſervi à reſoudre les Problêmes précedents.

Il n'en eſt pas de même des jeux où la ſcience du joueur a part à l'évenement auſſi-bien que le ſort, car cette ſcience, qui n'en merite pas le nom, n'étant fondée que ſur des regles trompeuſes de vrai-ſemblance, & le plus ſouvent ſur le caprice & la fantaiſie des joueurs, il eſt impoſſible que les conjectures qu'on forme ſur ces regles, ne participent à leur incertitude. Ainſi la lumiere qui nous a conduit juſqu'ici dans les jeux de pur hazard, nous doit manquer dans la pluſpart des queſtions qu'on peut faire ſur les jeux dont les évenemens bons ou mauvais pour les joueurs, ne dépendent point entierement de la fortune.

Il eſt à propos d'éclaircir & de prouver ceci par des exemples.

Un Problême que l'on propoſe ſouvent ſur le Piquet, c'eſt de ſçavoir combien entre deux joueurs égaux, un premier en carte peut parier de faire de points. On croit communément que cela peut aller à vingt-huit points, & c'eſt ſur ce pied que j'en ai vû faire le parti à de bons joueurs. Or afin qu'un premier en carte pût reſoudre cette queſtion, il faudroit qu'il ſçût non ſeulement le nombre des diſpoſitions differentes que peuvent recevoir ſes douze cartes, & celles du dernier, & qu'il ſçût encore l'art de comparer tous les changemens qui peuvent arriver à ſes douze cartes lorſqu'il en écartera cinq pour en prendre autant dans le talon, & aux douze cartes du dernier lorſqu'il en écartera trois pour en prendre trois au talon. Il ſeroit encore neceſſaire qu'il ſçût ce que le dernier doit écarter dans chacune des differentes diſpoſitions poſſibles de ſes douze cartes. Or c'eſt là ce que le premier ne peut ſçavoir, le dernier ne le ſçachant pas lui-même, car il n'y a point de joueur qui ait des regles fixes & certaines pour toutes les differentes diſpoſitions poſſibles du jeu. Neanmoins ſans cette derniere connoiſſance, la premiere eſt preſque inutile à celui qui eſt premier en cartes, & il ne pourra jamais ſe faire des regles ſûres pour écarter à propos, & enſuite pour bien jouer les cartes.

Suppoſons encore qu'un joueur veuille examiner ce qui lui eſt le plus avantageux d'écarter, une quarte majeure ou une quarte de Roy. Il eſt vrai qu'il s'appercevra ſans peine qu'en gardant la quarte de Roy, il y a deux cartes qui lui peuvent donner une quinte, contre une s'il garde la quarte majeure; mais il n'en ſçauroit conclure quel parti il doit prendre, car outre que cela dépend de l'état où eſt la partie, il faut qu'il ait égard à la diſpoſition du reſte de ſon jeu, qu'il conſidere ce qu'il a à craindre de ſon adverſaire, il doit penſer à faire les cartes ou à les rendre égales, &c. Or tout cela demande un grand nombre de comparaiſons dont chacune ſeroit la matiere d'un Problême fort compoſé. Ainſi il faut avouer que dans l'examen du

détail de ce jeu, la theorie ne peut mener bien loin.

La premiere regle de l'Analyſe, c'eſt qu'on ne peut découvrir ce qui eſt inconnu que par le moyen de ce qui eſt connu. Or dans les deux queſtions précedentes ce qui eſt connu n'eſt pas ſuffiſant pour découvrir ce qui eſt à trouver.

Il en eſt ainſi de la pluſpart des queſtions qu'on peut propoſer ſur le jeu de l'Ombre, & d'autant plus, qu'on y joue trois, avec quarante cartes, & qu'il reſte un plus grand nombre de cartes au talon. C'eſt pourquoi dans la plus grande partie des difficultés qui ſe preſentent ſur ce jeu, il faut ſe contenter de chercher le vrai-ſemblable, & borner ſon étude à approcher de la verité le plus qu'il eſt poſſible. Quoique bien des joueurs entendent l'art de deviner beaucoup mieux que moi, je ne laiſſerai pas de faire voir par l'exemple qui ſuit, de quelle maniere il s'y faut prendre.

Soit ſuppoſé que Pierre ait fait jouer en pique, qu'il ait quatre mains, & que jouant ſa cinquiéme il lui reſte encore deux triomphes ſûres, & outre cela le Roy de carreau & la Dame de cœur. On demande ſi Pierre doit tenter de faire la volle.

Pour reſoudre exactement ce Problême, il faudroit y faire entrer mille circonſtances dont on ne pourroit calculer la valeur préciſe qu'avec un fort grand travail : mais ſi l'on veut ſe contenter de la vrai-ſemblance, il ſuffira d'obſerver quelles ſont les rencontres principales où Pierre entreprenant la volle perdroit, quelles ſont celles qui le feroient certainement gagner, & quelles ſont celles auſſi qui rendroient le ſuccès incertain. Ainſi dans le cas preſent on remarquera que Pierre gagnera, ſi le Roy de trefle étant dans une main, le Roy de cœur eſt dans l'autre main avec la garde à carreau ; ou ſi les deux Rois étant dans une même main avec la garde à carreau, cette garde n'eſt point dans l'autre main, ou eſt moins avantageuſe.

2°. Que Pierre perdra ſi aucun des deux joueurs n'ayant la garde à carreau, les deux Rois ſont en différente main, ou ſi l'un des deux joueurs a la garde à carreau & le Roy de trefle, l'autre joueur ayant le Roy de cœur ſans garde

à carreau, ou avec une garde moins avantageuſe que celle qui accompagne le Roy de trefle.

3°. Que ſi les deux Rois ſe trouvent dans une même main ſans qu'aucun des deux joueurs ait la garde à carreau, il y aura pour Pierre autant d'eſperance de gagner que de riſque de perdre.

On pourra en peſant ces raiſons pour & contre, & y faiſant entrer quelques autres circonſtances, par exemple celle-ci, que la garde à carreau peut être ſi baſſe que le joueur ſe déterminera plutôt à garder ſon Roy que cette garde; on pourra, dis-je, en examinant combien l'un de ces cas fournit plus de rencontres qu'un autre, tirer de cette comparaiſon des raiſons fort vrai-ſemblables pour ſe déterminer. Pour moi j'avoue que je prefererois de tenter la volle; & quoi qu'apparemment cela n'ait été pratiqué par perſonne, je ſuis perſuadé que ceux qui feront attention ſur ce qui précede, ne ſeront pas fort éloignés de mon ſentiment; il ſe preſente très ſouvent des difficultés de cette nature, & ce ſont autant de Problêmes qu'il faut réſoudre, & réſoudre ſur le champ. C'eſt pourquoi il faut convenir qu'un homme qui a l'eſprit vif & pénetrant, & qui a l'habitude du jeu, a bien plus d'avantage à bien prendre ſon parti dans la plûpart des rencontres de ce jeu, qu'un autre joueur qui avec autant d'habitude aura l'imagination moins juſte & moins agiſſante, car il ne faut pas moins d'eſprit pour rencontrer le vrai-ſemblable lorſque l'évidence manque, que pour découvrir la verité lorſqu'il eſt poſſible de la trouver.

Le Brelan, & generalement tous les jeux où l'on renvie ſont ſujets aux mêmes inconvenients que le jeu de l'Ombre, & même à de plus grands. Suppoſons par exemple, qu'il y ait trois joueurs, Pierre, Paul & Jacques; Pierre paſſe, Paul tient le jeu, & Jacques renvie; Paul tient le renvi, & va de tout ce qu'il a devant lui, ce ſera par exemple 30 *A*, le jeu étant *A*. On demande ſi Jacques, que l'on ſuppoſe avoir quarante & un en main, & qui eſt dernier, doit tenir ou abandonner ce qu'il a déja mis au jeu, par exemple 14 *A*. Je ſçai que bien des perſonnes n'heſi-

teroient pas à décider là-dessus pour ou contre, chacun consultant son humeur plûtôt que l'évidence. Pour moi je crois pouvoir assurer qu'il est impossible de déterminer exactement quel parti Jacques doit prendre, & ma raison est qu'il ne suffit pas à Jacques pour se déterminer avec raison, de sçavoir qu'entre 134596 façons differentes dont les cartes de Pierre & de Paul peuvent être disposées, il n'y en a que 3041 qui puissent faire perdre Jacques. Il faudroit qu'il y eût des regles certaines & connues aux deux Joueurs pour sçavoir à quelle carte il faut tenir le jeu, & jusqu'où il est à propos de tenir ou de pousser pour chaque jeu. Alors Jacques pourroit compter que Paul a l'un des jeux qui ont pu lui permettre d'aller de tout, & sur cela il pourroit à peu près se déterminer; je dis à peu près, car il ne seroit pas sûr que Paul pour lui donner le change, ne poussât à un jeu fort inferieur à celui qu'il devroit avoir pour forcer avec raison, & par là Jacques seroit exposé à manquer de gagner, & même à perdre ses avances lorsqu'il auroit dû gagner.

Ces reflexions & quelques autres pareilles que tout le monde peut faire, sont suffisantes pour faire connoître qu'il y a en ces matieres des Problêmes qu'il est impossible de resoudre, & qu'on ne doit point par consequent s'attendre à trouver dans ce Livre. Les exemples suivans feront connoître de quelle nature sont ceux dont la recherche peut être tentée en ces matieres avec esperance de succès. Je n'en ai mis qu'un petit nombre, & j'ai choisi entre ceux qui m'ont paru curieux & de quelque usage pour les Joueurs, ceux que j'ai cru les plus propres à faire connoître l'utilité des lemmes qui suivent. Il sera aisé de s'appercevoir qu'on peut les appliquer à des recherches plus importantes que ne sont les nôtres.

DE'FINITION.

ON entend quelquefois par ce terme combinaison, la maniere dont plusieurs choses peuvent être prises differemment deux à deux. Je lui donnerai ici une signification plus étendue, & j'entendrai par ce mot la maniere

de trouver generalement toutes les diſpoſitions que peuvent avoir ſoit deux, ſoit pluſieurs choſes ſelon qu'on les voudra prendre, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou enfin de toutes les manieres poſſibles.

PROBLEME.

PROPOSITION X.

Un nombre de choſes quelconque étant propoſé, par exemple les lettres a, b, c, d, f, g, h, *&c. on demande combien il y a de façons differentes de les prendre, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou enfin de toutes les manieres poſſibles.*

POUR reſoudre ce Problême, je me ſervirai de la Table ci-jointe, dont je vas expliquer la formation, & dont je démontrerai enſuite l'uſage par rapport aux combinaiſons.

Table de M. Paſcal pour les combinaiſons.

1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12. 13
		1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.	66. 78
			1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220. 286
				1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495. 715
					1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792. 1287
						1.	7.	28.	84.	210.	462.	924. 1716
							1.	8.	36.	120.	330.	792. 1716
								1.	9.	45.	165.	495. 1287
									1.	10.	55.	220. 715
										1.	11.	66. 286
											1.	12. 78
												1. 13
												1

J'appelle bandes horizontales celles où les chiffres vont de gauche à droite, & bandes perpendiculaires celles où les chiffres vont de haut en bas; j'appelle cellule la poſition d'un chiffre renfermé entre deux points.

La

La ſeconde bande horizontale eſt la ſuite des nombres naturels un, deux, trois, quatre, &c.

La troiſiéme bande horizontale eſt formée ſur la ſeconde en cette maniere; 1°, je rétrograde de gauche à droite d'une celule: 2°, pour former le chiffre de chaque celule de cette bande, j'ajoute tous les chiffres qui le précedent à gauche dans la bande ſuperieure horizontale. Ainſi le nombre ſix, troiſiéme chiffre de la troiſiéme bande horizontale, eſt égal à la ſomme du premier, du ſecond & du troiſiéme chiffre de la ſeconde bande horizontale.

La quatriéme bande horizontale ſe forme ſur la troiſiéme en la même maniere que la troiſiéme ſe forme ſur la ſeconde: Ainſi on trouvera que le nombre 20 qui eſt le quatriéme de la quatriéme bande horizontale, eſt égal à la ſomme des quatre chiffres qui le précedent dans la bande ſuperieure horizontale qui eſt la troiſiéme. Il en ſeroit de même de tous les autres chiffres de cette quatriéme bande.

On formera les chiffres qui compoſent les autres bandes horizontales de la même maniere que l'on a formé la ſeconde ſur la premiere, & la troiſiéme ſur la ſeconde, obſervant toujours de rétrograder chaque bande d'une celule avançant vers la droite; c'eſt ce qu'on pourra aiſément découvrir en conſiderant la table qu'on pourra continuer à l'infini.

Les nombres qui compoſent la premiere bande horizontale ſont appellés nombres du premier ordre, ceux qui compoſent la ſeconde bande horizontale ſont appellés nombres du ſecond ordre, ceux qui compoſent la troiſiéme bande ſont appellés nombres du troiſiéme ordre, &c.

Ces nombres à qui on donne auſſi les noms d'unités, de nombres naturels, nombres triangulaires, pyramidaux, triangulo-pyramidaux, &c. à cauſe de certains raports qu'ils ont aux triangles, aux Pyramides, &c. ont des proprietés fort ſingulieres, que Mrs Fermat, Deſcartes, Paſcal, & pluſieurs autres grands Geometres François & Etrangers ont recherchés avec grand ſoin. Une des prin-

cipales, & dont il s'agit ici, eſt que par leur moyen on peut trouver tout d'un coup en combien de manieres differentes un nombre quelconque de jettons ou de cartes ou de toute autre choſe, peut être combiné, c'eſt à dire pris ou un à un, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. dans un plus grand nombre de jettons & de cartes.

Par exemple ſi l'on demande en combien de façons differentes ſix choſes differentes peuvent être priſes deux à deux; on trouvera que le nombre quinze qui répond à la troiſiéme bande horizontale & à la ſeptiéme bande perpendiculaire, eſt le nombre que l'on cherche: & de même ſi l'on veut ſçavoir en combien de façons differentes onze choſes peuvent être priſes quatre à quatre, on trouvera que le nombre 330 qui répond à la cinquiéme bande horizontale & à la douziéme bande perpendiculaire, eſt le nombre que l'on demande. On trouvera de même toutes les autres combinaiſons imaginables en cherchant le nombre qui répond à une colonne perpendiculaire dont le quantiéme ſurpaſſe de l'unité le nombre de choſes propoſé, & à une colonne horizontale qui ſoit la troiſiéme ſi les choſes ſe combinent deux à deux, la quatriéme ſi les choſes ſe combinent trois à trois, &c.

M^r Paſcal eſt le premier qui ait découvert cet uſage des nombres de differents ordres, & on peut en voir la démonſtration dans le Traité qu'il a fait intitulé *Triangle Arithmetique*, où il applique ces nombres tant aux combinaiſons, qu'à trouver les partis que doivent faire deux Joueurs qui jouant en un certain nombre de points à un jeu égal, ont plus ou moins de points.

DEMONSTRATION.

POUR me faire plus facilement entendre, je prens un exemple, & je ſuppoſe que l'on veuille ſçavoir en combien de façons differentes ſix choſes peuvent être priſes ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou ſix à ſix, ſoient ces ſix choſes quelconques exprimées par les ſix lettres a, b, c, d, f, g.

Premierement il eſt évident que ſi l'on cherche en combien de façons ces ſix lettres peuvent être priſes une à une, le nombre ſix ſera celui qui ſatisfait au Problême. Or il eſt évident que les termes de la premiere bande horizontale qui précedent le nombre ſix de la ſeconde, étant ajoutés en une ſomme font le nombre ſix.

Suppoſons enſuite que l'on veuille ſçavoir en combien de façons differentes ces mêmes lettres peuvent être priſes deux à deux. Pour le trouver on obſervera, 1°, que la lettre *a* peut ſe combiner avec les cinq ſuivantes *b*, *c*, *d*, *f*, *g*. 2°. Que la lettre *b* peut ſe combiner differemment avec les quatre lettres ſuivantes *c*, *d*, *f*, *g*, ce qui donne quatre combinaiſons differentes *bc*, *bd*, *bg*, *bf*; car *ba* feroit bien un arrangement different de *ab*; mais non pas une combinaiſon differente. 3°. Que *c* ne ſe combine qu'avec les lettres *d*, *g*, *f*; car *ca*, *cb*, ne feroient point de combinaiſons differentes. 4°. Que *d* ne ſe combine qu'avec les deux lettres *f* & *g*; car *da*, *dc*, *db*, ne feroient point de combinaiſons differentes. 5°. Que *f* ne ſe combine qu'une fois avec *g*; car *fa*, *fb*, *fc*, *fd*, ſeroient des repetitions des combinaiſons precedentes, ce qu'il faut obſerver avec ſoin; car c'eſt là le principal fondement de la demonſtration.

Toutes ces combinaiſons enſemble de ſix lettres priſes deux à deux, ſont

ab, *ac*, *ad*, *ag*, *af*
bc, *bd*, *bg*, *bf*
cd, *cg*, *cf*
dg, *df*
fg

dont la ſomme $5+4+3+2+1=15$.

Et par conſequent le nombre 15 qui ſe trouve dans la ſeptiéme bande perpendiculaire & dans la troiſiéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le precedent à gauche dans la bande ſuperieure horizontale, & eſt en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes deux à deux.

Supposons maintenant que l'on veuille trouver en combien de façons differentes ces six lettres peuvent être prises trois à trois.

On remarquera 1°, que *ab* peut se combiner en quatre façons avec les lettres *c*, *d*, *f*, *g*; *ac* en trois façons, *ad* en deux façons, & *af* seulement d'une façon.

2°. Que *bc* se combine en trois façons avec les lettres *d*, *f*, *g*; *bd* en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & *bf* seulement d'une façon avec *g*.

3°. Que *cd* se combine en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & *cf* seulement d'une façon avec *g*.

4°. Il est évident que *df* ne peut se combiner que d'une façon avec *g*. Toutes ces combinaisons ensemble de six choses prises trois à trois, sont

abc, *abd*, *abf*, *abg*, *acd*, *acf*, *acg*, *adf*, *adg*, *afg*
bcd, *bcf*, *bcg*, *bdf*, *bdg*, *bfg*
cdf, *cdg*, *cfg*
dfg

dont la somme 10 + 6 + 3 + 1 = 20.

Et par conséquent le nombre 20 qui se trouve dans la septiéme bande perpendiculaire, & dans la quatriéme bande horizontale, est la somme des nombres qui le precedent à gauche dans la bande superieure horizontale, & est en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes six lettres peuvent être prises trois à trois. Donc, &c.

Supposons encore que l'on veuille sçavoir en combien de façons differentes ces six lettres peuvent être prises quatre à quatre.

On observera 1°, que *abc* peut se combiner en trois façons differentes avec les lettres *d*, *f*, *g*; *abd* en deux façons avec *f* & *g*; *abf* seulement avec *g*; que *acd* peut se combiner en deux façons avec les lettres *f* & *g*; que *acf* & *adf* se combinent seulement d'une façon.

2°. Que *bcd* se combine en deux façons avec les lettres *f* & *g*, & que *bcf*, *bdf* & *cdf* ne se combinent que d'une façon avec *g*.

Toutes ces combinaiſons enſemble ſont

abcd, abcf, abcg, abdf, abdg, abfg, acdf, acdg, acfg, adfg
bcdf, bcdg, bcfg, bdfg
cdfg

dont la ſomme 10+4+1=15.

Et par conſequent le nombre 15 qui eſt dans la ſeptiéme bande perpendiculaire & dans la cinquiéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le precedent à gauche dans la bande ſuperieure, & eſt en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes quatre à quatre.

Si l'on veut encore ſçavoir en combien de façons differentes ces ſix lettres peuvent être priſes cinq à cinq, on remarquera 1°, que *abcd* ne peut ſe combiner differemment qu'avec les deux lettres *f* & *g*; *abcf* qu'en une ſeule façon avec *g*, *abdf* en une ſeule façon avec *g*; & *acdf* qu'en une façon avec *g*. 2°. Que *bcdf* ne ſe combine que d'une façon avec *g*.

La ſomme de ces combinaiſons de ſix choſes priſes cinq à cinq, ſera donc *abcdf, abcdg, abcfg, abdfg, acdfg, bcdfg* = 6.

Et par conſequent le nombre 6 qui eſt dans la ſeptiéme bande perpendiculaire & dans la ſixiéme bande horizontale, eſt la ſomme des nombres qui le precedent dans la bande ſuperieure horizontale, qui eſt celle des nombres du cinquiéme ordre; & eſt en même temps le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſix lettres peuvent être priſes cinq à cinq.

Enfin il eſt évident que ſix lettres ne peuvent être priſes que d'une façon ſix à ſix.

De tout cela il faut conclure que la ſeptiéme colonne perpendiculaire exprime toutes les manieres poſſibles, dont ſix choſes peuvent êtres priſes, ou une à une, ou deux à à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, ou ſix à ſix.

On trouvera de même que la huitiéme colonne perpendiculaire exprime toutes les manieres poſſibles dont

ſept choſes peuvent être priſes, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq, &c. Et enfin que cette table étant continuée à l'infini, donneroit toutes les manieres poſſibles dont un nombre quelconque de jettons ou de cartes pourroit être pris ou un à un, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. dans un nombre plus grand de jettons ou de cartes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On tire de la démonſtration précedente une maniere aiſée & courte de former la table, c'eſt à ſçavoir d'ajoûter en une ſomme le chiffre qui précede le nombre cherché à gauche dans la même bande horizontale, & le chiffre qui eſt ſuperieur à celui qui eſt à la gauche; ainſi pour former la troiſiéme bande horizontale, j'ajoûte le nombre qui eſt à la gauche (c'eſt zero) & le nombre audeſſus, cela me donne un pour le premier terme de cette bande. Pour avoir le ſecond, j'ajoute le nombre 1 qui eſt à la gauche du nombre cherché avec le nombre 2 qui lui eſt ſuperieur, la ſomme $2+1=3$ ſera le ſecond de la troiſiéme bande horizontale; le troiſiéme terme de cette bande ſera $3+3=6$, le quatriéme ſera $6+4=10$, & ainſi de ſuite. Si l'on veut par exemple trouver le nombre qui répond à la neuviéme bande perpendiculaire & à la ſixiéme bande horizontale, j'ajoûte 35 à 21, la ſomme qui eſt 56 eſt le nombre cherché.

Cette maniere de conſiderer la formation de cette table, preſente une nouvelle démonſtration de ſon uſage pour les combinaiſons, qui eſt plus ſimple & plus courte que la précedente.

AUTRE DEMONSTRATION.

SOIT ſuppoſé que l'on veuille prendre cinq choſes par ex. de toutes les manieres poſſibles, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, ou cinq à cinq. Il eſt clair 1° que cinq choſes a, b, c, d, e peuvent être priſes deux à deux en autant de façons que quatre choſes ont été priſes en cette maniere, (or les lettres a, b, c, d, ont pû être miſes deux à deux en ſix façons, ſçavoir $ab, ac, ad,$

bc, *bd*, *cd*) & qu'elles peuvent être prises outre cela en autant de façons que quatre choses peuvent être prises une à une, sçavoir *ae*, *be*, *ce*, *de*, ce qui donne dix combinaisons de cinq choses prises deux à deux. 2°. Cinq choses peuvent être prises trois à trois en autant de façons que quatre choses ont été prises trois à trois & deux à deux. Or quatre choses peuvent être prises trois à trois en quatre façons, *abc*, *acb*, *abd*, *bcd*; & deux à deux en six façons; *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; donc si on ajoute la lettre *e* à ces six dernieres façons differentes, on trouvera que le nombre 10 exprime en combien de façons differentes cinq choses peuvent être prises trois à trois, & est en même temps la somme du nombre qui le precede à gauche, & de celui qui est au dessus de ce nombre. Cette démonstration s'étend à tous les nombres de la table, & est fondée sur ce qu'un nombre quelconque p peut être pris dans un autre nombre quelconque, mais plus grand, q, en autant de façons que p & $p - 1$ peuvent être pris dans $q - 1$. Or cette proposition est évidente à l'égard du nombre qui est à gauche, puisque le petit est contenu dans le plus grand; elle est vraie aussi à l'égard de celui qui est superieur au nombre de la gauche, puisqu'en y joignant la lettre qui n'est point entrée dans les combinaisons qu'exprime le nombre de la gauche, il en fournit de nouvelles, & supplée à celles qui manquent au nombre de la gauche. Donc, &c.

REMARQUE.

POUR épargner la peine au Lecteur de former des tables qui puissent servir à trouver toutes les combinaisons dont on aura besoin dans la suite, ce qui est d'une longueur excessive lorsque les combinaisons que l'on cherche sont entre de grands nombres. Par exemple, lorsqu'un des nombres étant 49, l'autre est 100, il est utile & même necessaire de trouver quelque formule qui puisse donner le nombre cherché sans avoir besoin de connoître toutes les combinaisons possibles entre de moindres nombres. C'est ce que l'on apprendra par le Lemme qui suit.

PROPOSITION XI.

LEMME.

Pour trouver tout d'un coup tel terme que l'on voudra d'une colonne perpendiculaire quelconque de la table page 80 continuée à discretion, on multipliera celui qui est immédiatement au dessus par l'exposant de la bande perpendiculaire, moins l'exposant de la bande horizontale plus un. Ce produit divisé par l'exposant de la colonne horizontale moins un donnera le nombre cherché; en sorte que nommant, par exemple le premier terme d'une colonne perpendiculaire quelconque 1, *le second* p, *le troisième* B, *le quatrième* C, *le cinquiéme* D, &c. *on aura le premier* $= 1$, *le second* $p = 1 \times \frac{p+1-2+1}{2-1}$, *le troisiéme* $B = p \times \frac{p+1-3+1}{3-1} = p \times \frac{p-1}{2}$, *le quatrième* $C = B \times \frac{p+1-4+1}{4-1} = B \times \frac{p-2}{3} = p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, *le cinquiéme* $D = C \times \frac{p+1-5+1}{5-1} = C \times \frac{p-3}{4} = p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4}$, &c.

Pour démontrer ce Lemme, j'en ferai d'abord appercevoir la verité sur une des colonnes perpendiculaires de la table prise à discretion, & après cette induction je prouverai que toutes les autres à l'infini doivent suivre cette même loi.

Il est visible en examinant, par exemple, la sixiéme où $p = 5$, que l'on aura $B = \frac{5 \times 4}{2} = 10$, $C = \frac{10 \times 3}{3} = 10$, $D = \frac{10 \times 2}{4} = 5$, $E = \frac{5 \times 1}{5} = 1$; & qu'ainsi en suivant la regle du Lemme, on trouve chaque terme de cette colonne tel que le donne la formation de la table.

Il faut maintenant prouver que cette regle ayant lieu comme par hazard pour cette colonne, elle a lieu par necessité à l'égard des autres.

Soit la colonne septiéme celle que l'on veut examiner, & dont on doit trouver par le Lemme tous les termes conformes à ceux que donne la formation de la table.

Il est clair que le premier de cette bande sera 1, & que le second sera $p + 1$, on trouvera par le Lemme que

le

le troiſiéme eſt $\frac{p+1 \times p}{2} = 15$, & par la formation de la table qu'il eſt $p \times \frac{p-1}{2} + p = \frac{pp-p+2p}{2} = \frac{pp+p}{2}$, ce qu'il falloit premierement trouver. Si l'on ſuppoſe maintenant que $p+1$ de la quantité que l'on vient de trouver ſoit changée en p, on trouvera en ſubſtituant p pour $p+1$ dans la quantité $p \times \frac{p+1}{2}$ qu'elle ſe change en celle-ci $p \times \frac{p-1}{2}$ d'où il ſuit qu'on trouveroit par ce moyen le troiſiéme terme de la huitiéme bande perpendiculaire $= p \times \frac{p+1}{2} = 21$ & qu'employant toujours le même artifice, on trouveroit ainſi de ſuite conformément au Lemme tous les termes de la troiſiéme bande horizontale, tels que les donne la formation de la table. L'on trouvera auſſi par le Lemme le 4e terme de cette ſeptiéme bande horizontale $= \frac{p+1 \times p}{2} \times \frac{p-1}{3} = \frac{p^3-p}{6} = 20$, & par la formation cet autre $\frac{p \times p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} + \frac{p \times p-1}{2} = \frac{p^3-3pp+2p+3pp-3p}{1 \times 2 \times 3} = \frac{p^3-p}{6}$ qui lui eſt égal. Maintenant ſi l'on ſubſtitue dans cette quantité, p pour $p+1$, elle ſe changera en celle-ci, $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, & en vertu de cette ſuppoſition on trouveroit le quatriéme terme de la huitiéme bande perpendiculaire $= \frac{p^3-p}{6} = 35$, & ainſi on s'aſſurera de la verité du Lemme à l'égard de tous les termes de cette quatriéme bande horizontale.

On trouvera encore par le Lemme le cinquiéme terme de la ſeptiéme bande perpendiculaire $= \frac{\frac{p^3-p \times p-2}{6}}{4} = \frac{p^4-2p^3-pp+2p}{24} = 15$, & par la formation le même terme ſous cette forme $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$ qui ſe réduit à celle-ci $\frac{p4-2p^3-pp+2p}{24}$.

Maintenant ſi l'on ſubſtitue dans cette quantité, p à la place de $p+1$, elle ſe changera en celle-ci, $p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4}$, qui ſervira à trouver tous les termes de la cinquiéme bande horizontale, ainſi qu'on l'a enſeigné ci-devant.

On trouvera enfin par le Lemme le ſixiéme terme de la ſeptiéme bande perpendiculaire $= \frac{p^4-2p^3-pp+2p}{24} \times \frac{p-3}{5}$ $= \frac{p^5-5p^4+5p^3+5pp-6p}{120} = 6$, & par la formation ce même terme $= \frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ $= \frac{p^5-5p^4+5p^3+5pp-6p}{120}$; & en ſubſtituant comme on a fait ci-devant p à la place de $p+1$, on s'aſſurera que le terme ſuivant & tous les autres de cette ſixiéme colonne horizontale doivent ſuivre l'ordre qu'enſeigne le Theorême.

COROLLAIRE I.

IL ſuit du Lemme précedent que ſi l'on cherche en combien de façons le nombre q peut être pris dans un autre nombre plus grand qui ſoit appellé p, le nombre cherché ſera exprimé par une fraction dont le numerateur ſera égal à autant de produits de p, $p-1$, $p-2$, $p-3$, $p-4$, &c. que q exprime d'unités, & dont le dénominateur ſera compoſé d'un égal nombre de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

COROLLAIRE II.

SI l'on veut prendre ou p ou q dans un nombre exprimé par m, je dis que ſi $p+q=m$, le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre p dans m ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on peut y prendre q. Ainſi par exemple m étant $=7$, le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre trois choſes dans ſept, ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on y en peut prendre quatre ; & de même le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre deux choſes dans ſept, ſera le même que celui qui exprime en combien de façons on y en peut prendre cinq ; & le nombre qui exprimera en combien de façons on peut prendre une choſe dans ſept, exprimera en combien de façons on y en peut prendre ſix.

Il suit de là 1°, que si m exprime un nombre impair, les deux nombres de la colonne perpendiculaire qui sont les plus éloignés des extremités, sont égaux & les plus grands entre tous ceux de la colonne ; & que si m exprime un nombre pair, celui du milieu sera le plus grand d'entre tous les nombres de cette colonne. 2°. Que les nombres qui sont à égale distance, ou de celui du milieu si m est un nombre pair, ou des deux moyens s'il est impair, seront égaux l'un à l'autre. 3°. On peut observer que la somme de tous les termes d'une bande perpendiculaire quelconque est égale au terme correspondant d'une progression geometrique double, dont le premier terme soit l'unité.

Ainsi par exemple on trouvera que le huitiéme terme d'une progression geometrique double qui est 128, sera égal à la somme de tous les nombres que contient la huitiéme bande perpendiculaire.

COROLLAIRE III.

DANS toutes les applications particulieres, la formule du premier Corollaire se réduit toujours à un nombre entier ; ainsi, par exemple, la formule $\frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4 \times p-5 \times p-6 \times p-7 \times p-8 \times p-9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ &c. qui, en supposant $p = 40$, exprimeroit en combien de façons dix choses peuvent se prendre dans quarante, se réduit en divisant le numerateur & le dénominateur autant qu'il est possible, à la quantité $31 \times 4 \times 11 \times 34 \times 37 \times 38 \times 13 = 847660528$.

COROLLAIRE IV.

LE nombre p exprimant la suite des nombres naturels, la formule des nombres triangulaires sera $p \times \frac{p+1}{2}$, celle des nombres pyramidaux sera $p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3}$, celle des nombres triangulopyramidaux sera $p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3} \times \frac{p+3}{4}$, &c.

en ſorte que ſi l'on range les nombres de differents ordres de telle maniere que ne rétrogradant point d'un chiffre, comme dans la table page 80, d'une bande ſuperieure horizontale à la ſuivante, ils faſſent une figure quarrée à la place de la figure triangulaire qu'ils ont dans la table page 80, ſi l'on veut trouver dans cette nouvelle table tel nombre figuré que l'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe, il n'y aura qu'à ſubſtituer dans cette formule pour p le quantiéme du nombre figuré que l'on cherche, c'eſt ce que je vois démontré fort au long & très ſçavament dans un Livre poſthume de M^r le Marquis de l'Hopital qui paroît depuis quelques jours, il employe ce Theorême à établir pluſieurs propoſitions curieuſes & nouvelles en Geometrie ; mais la voye qu'il prend pour démontrer ce Lemme eſt tout-à-fait differente de celle-ci.

SECONDE METHODE

POUR LES COMBINAISONS.

PROPOSITION XII.

POUR me faire plus facilement entendre je me ſers d'un exemple. Soit ſuppoſé que l'on cherche combien il y a à parier que tirant quatre cartes au hazard dans quarante, par exemple dans un jeu d'Ombre, on y tirera les quatre as. Il eſt d'abord évident qu'il m'eſt permis de ſuppoſer que ces quatre as ſe trouveront dans les quatre cartes de deſſus, puiſque j'ai la liberté de les choiſir partout où je voudrai ; or il eſt clair que nommant m le nombre de tous les arrangemens poſſibles de quarante cartes, mon ſort pour que l'as de carreau ſe trouve à la premiere place eſt $1 \times \frac{\frac{m}{40}}{m} = \frac{1}{40}$, puiſque cet as étant à la premiere place les trente-neuf autres peuvent avoir tous les divers arrangemens imaginables ; & de même que mon ſort pour que l'as de carreau ſe trouvant à la premiere place, l'as de

cœur soit à la seconde, est $\frac{1 \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39}}{m} = \frac{1}{40 \times 39}$; puisque l'as de carreau étant à la premiere place, & l'as de cœur à la seconde, les trente-huit autres cartes peuvent être rangées diversement en autant de façons qu'exprime d'unités un nombre composé de 38 produits des nombres naturels depuis l'unité jusqu'au nombre 38 inclusivement.

Et pour la même raison mon sort pour amener l'as de trefle à la troisiéme place, l'as de carreau étant à la premiere & l'as de cœur à la seconde, seroit $\frac{1 \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} \times \frac{1}{38}}{m} = \frac{1}{40 \times 39 \times 38}$: & enfin mon sort pour que, l'as de carreau étant à la premiere place, l'as de cœur à la seconde, & l'as de trefle à la troisiéme, l'as de pic fût à la quatriéme, est $\frac{1 \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} \times \frac{1}{38} \times \frac{1}{37}}{m} = \frac{1}{40 \times 39 \times 38 \times 37}$. Il est pareillement certain par les regles des changemens d'ordre, page 8 que le produit des quatre nombres 1, 2, 3, 4 = 24 exprime tous les arrangemens possibles des quatre as aux quatre premieres places. Donc mon sort pour que les quatre as se trouvent dans les quatre premieres cartes sera $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{40 \times 39 \times 38 \times 37}$. Maintenant si je suppose que la lettre p exprime le nombre de toutes les manieres possibles de prendre quatre choses dans quarante; il est évident que mon sort pour prendre quatre choses déterminées dans quarante, sera $\frac{1}{p}$: j'aurai donc $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{40 \times 39 \times 38 \times 37} = \frac{1}{p}$, d'où je tirerai $p = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, & $\frac{1}{p} = \frac{1}{91390}$.

Cet exemple fait voir que si je me propose de tirer un nombre quelconque exprimé par q de choses déterminées, dans un nombre plus grand appellé p, mon sort sera exprimé par une fraction dont le numerateur sera composé d'autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. & le dénominateur d'autant de produits des quantités p, $p-1$, $p-2$, $p-3$, &c. que q exprime d'unités; en sorte qu'appellant g le nombre de toutes les manie-

res possibles de prendre q dans p, mon sort sera $\frac{n}{g} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6,\ \&c.}{p\times p-1\times p-2\times p-3\times p-4\times p-5,\ \&c.}$ d'où je tire $g = \frac{p\times p-1\times p-2\times p-3\times p-4\times p-5}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$; &c. *ce qu'il falloit trouver.* Et par conséquent me voila retombé par la methode des changemens d'ordre dans celle des combinaisons, & dans la même formule des nombres figurés que nous avons trouvés ci-devant en tenant une route fort differente.

PROPOSITION XIII.

LEMME.

Pierre tenant entre ses mains un nombre quelconque de jettons de toutes couleurs, blancs, noirs, rouges, &c. parie contre Paul que tirant au hazard un nombre quelconque déterminé de jettons, il en tirera tant de blancs, tant de noirs, tant de rouges, &c. On demande quel est le sort de Pierre & celui de Paul dans tous les cas possibles.

IL faut multiplier le nombre qui exprime en combien de façons les jettons blancs que Pierre doit prendre au hazard, peuvent être pris differemment dans le nombre de jettons blancs proposés, par le nombre qui exprime en combien de façons les jettons noirs que Pierre doit prendre au hazard, peuvent être pris differemment dans le nombre entier de jettons noirs proposés; multiplier ensuite ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons differentes les jettons rouges que Pierre se propose de tirer, peuvent être pris dans les jettons rouges proposés, multiplier de nouveau ce produit, &c. & diviser tous ces produits par le nombre qui exprime en combien de façons differentes tous les jettons ensemble de differente couleur que l'on doit prendre, peuvent être pris dans tous les jettons proposés. L'exposant de cette division exprimera le sort de Pierre; ou ce que Pierre devroit parier contre Paul pour que le parti fût égal.

Pour rendre la démonſtration plus facile & moins abſtraite, je vas l'appliquer à quelques exemples particuliers.

EXEMPLE I.

Pierre tient deux jettons blancs, deux jettons noirs & deux jettons rouges. Il parie que les ayant mêlez, & tirant enſuite trois jettons au hazard entre ces ſix il en tirera un blanc, un noir & un rouge.

IL faut remarquer que s'il n'y avoit au jeu que deux jettons noirs & deux jettons blancs, il y auroit quatre manieres differentes de prendre dans ces quatre jettons deux jettons de differente couleur; car chacun des deux jettons blancs pourroit être pris avec chacun des deux jettons noirs, ce qui fait quatre façons. Maintenant ſi à ces quatre jettons on en ajoute deux autres rouges, il eſt clair que les quatre façons differentes que l'on vient de trouver pouvant ſe rencontrer chacune avec chacun des deux jettons rouges, le produit qui exprime tous les coups que Pierre a pour tirer trois jettons de differente couleurs entre ces ſix, ſera le cube de deux; c'eſt à dire, qu'il faudra multiplier le nombre qui exprime en combien de façons un jetton blanc peut être pris differemment en deux jettons blancs par le nombre qui exprime en combien de façons differentes un jetton noir peut être pris dans deux jettons noirs, & multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons un jetton rouge peut être pris differemment dans deux jettons rouges, *ce qu'il falloit démontrer.* Or l'on trouvera par la Propoſition douziéme & par la table, que ſix choſes peuvent ſe prendre differemment trois à trois en vingt façons; & par conſequent le ſort de Pierre ſera exprimé par la fraction $\frac{8}{20}$ ou $\frac{2}{5}$, le ſort de Paul ſera donc exprimé par la fraction $\frac{3}{5}$, & par conſequent le ſort de Pierre ſeroit au ſort de Paul comme deux eſt à trois, *ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE II.

Pierre tient cinquante-deux jettons entre ſes mains, ſçavoir treize blancs, treize noirs, treize rouges & treize bleus, ou, ce qui revient au même, un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes. On demande en combien de façons differentes il peut, tirant quatre cartes au hazard dans ces cinquante-deux en tirer un carreau, un cœur, un pic & un trefle.

S'IL n'y avoit que treize carreaux & treize cœurs, il y auroit cent ſoixante-neuf façons differentes de prendre dans ces vingt-ſix cartes deux cartes de ces deux eſpeces; car chacun des treize carreaux pourroit être pris avec l'as de cœur, ce qui fait treize, ou avec le deux de cœur, ce qui fait encore treize, & ainſi de ſuite chacun des treize carreaux pourroit être pris avec chacun des treize cœurs, ce qui fait 13×13, c'eſt à dire cent ſoixante-neuf façons de prendre un carreau & un cœur dans vingt-ſix cartes.

Preſentement ſi à ces treize carreaux & à ces treize cœurs on ajoute treize trefles, il faudra pour avoir toutes les façons poſſibles de prendre un carreau, un cœur & un trefle dans ces trente-neuf cartes, multiplier par 13 les cent ſoixante-neuf façons précedentes; car chacune de ces cent ſoixante-neuf façons differentes ſe pourra trouver avec l'as de trefle, ce qui fait $13 \times 13 \times 1$, & avec le deux, ce qui fait $13 \times 13 \times 2$, c'eſt à dire trois cens trente-huit façons differentes, & avec le trois, ce qui fait cinq cens ſept façons differentes, & ainſi ſucceſſivement chacune des cent ſoixante-neuf façons précedentes ſe pourra trouver avec chacun des treize trefles, ce qui fait $13 \times 13 \times 13$, c'eſt à dire deux mil cent quatre-vingt-dix-ſept façons differentes de prendre un carreau, un cœur & un trefle dans ces trente-neuf cartes. On obſervera de même que la quatriéme puiſſance de treize exprimera en combien de façons differentes quatre cartes de differentes eſpeces, ſçavoir un carreau, un cœur, un pic & un trefle peuvent être priſes dans les cinquante-deux cartes; *ce qu'il falloit démontrer.*

Or-

Or l'on trouvera par le Problême précedent & par la table que cinquante-deux cartes peuvent être prises quatre à quatre en deux cens soixante-dix mil sept cens vingt-cinq façons ; & par consequent le sort de Pierre sera exprimé par cette fraction $\frac{134}{270725} = \frac{28561}{270725}$, & le sort de Paul par cette autre $\frac{242164}{270725}$, & par consequent le sort de Pierre sera au sort de Paul :: 28561 . 242164 à peu près :: 1 . 8, en sorte qu'il aura de l'avantage à parier un contre neuf, & du désavantage à parier un contre huit.

DEFINITION.

J'APPELLERAI cartes simples les cartes de differentes especes ; carte double, deux cartes de même espece, par exemple, deux Rois, deux Dames, deux valets, &c. carte triple, trois cartes d'une même espece, par exemple, trois as, trois valets, trois dix, &c. carte quadruple, quatre cartes d'une même espece, carte quintuple, cinq cartes d'une même espece, &c.

PROBLEME.

PROPOSITION XIV.

Soit un nombre de cartes quelconque composé d'un nombre égal d'as, de deux, de trois, de quatre, &c. Pierre parie que tirant au hazard entre ces cartes un certain nombre de cartes à volonté, il en tirera tant de simples, tant de doubles, tant de triples, tant de quadruples, tant de quintuples, &c.

POUR faire entendre plus facilement la solution de ce Problême, j'appellerai *m* le nombre des cartes dans lesquelles on en veut prendre un certain nombre ; *q* le nombre de fois que chaque espece de cartes est repetée dans *m* ; *p* le nombre des differentes especes de cartes, en sorte que $q \times p$

soit $= m$; b l'exposant de la carte qui a la plus haute dimension entre celles que l'on se propose de prendre, c, d, e, f, &c. l'exposant des autres cartes que l'on veut prendre, dont la dimension est moindre, en sorte que c exprime un nombre plus petit que b, & d un nombre plus petit que c, & e un nombre plus petit que d, &c.

Je nommerai aussi B le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par b, C le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par c, D le nombre des cartes que l'on demande de la dimension exprimée par d, &c.

J'exprimerai aussi par cette marque $\boxed{\begin{smallmatrix} q \\ b \end{smallmatrix}}$ le nombre qui exprime en combien de façons b peut être pris dans q, mettant le plus petit nombre dessous, & le plus grand dessus, & entre deux cette marque arbitraire $\boxed{\ }$. Tout cela posé, voici la methode.

Il faut chercher en combien de façons b peut être pris dans q, élever ce nombre à l'exposant B, multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons B peut être pris dans p. 2°. Multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons c peut être pris dans q, élever ce nombre à l'exposant C, & multiplier ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons C peut être pris dans $p - B$. 3°. Multiplier les produits précedens par le nombre qui exprime en combien de façons d peut être pris dans q, élever ce nombre à l'exposant D, & le multiplier par celui qui exprime en combien de façons D peut être pris dans $p - B - C$. 4°. Multiplier tous les produits précedens par le nombre qui exprime en combien de façons e peut être pris dans q, élever ce nombre à l'exposant E, & le multiplier par celui qui exprime en combien de façons E peut être pris dans $p - B - C - D$, & ainsi de suite. Enfin il faut diviser cette quantité formée de tous ces produits par le nombre qui exprime en combien de façons on peut prendre le nombre

de cartes proposé dans *m*. La methode est renfermée dans cette formule.

$$S = \frac{q}{b}^{B} \times \frac{p}{B} \times \frac{q}{e}^{C} \times \frac{p-B}{C} \times \frac{q}{d}^{D} \times \frac{p-B-C}{D} \times \frac{q}{e}^{E} \times \frac{p-B-C-D}{E} \times \frac{q}{f}^{F} \times \frac{p-B-C-D-E}{F} \times \&c.$$

laquelle doit être divisée par le nombre qui exprime en combien de façons on peut prendre le nombre de cartes proposé dans *m*.

Il faut remarquer que cette formule étant appliquée à un cas particulier, ne doit être composée que d'autant de produits qui sont ici marqués par ×, qu'il y a de cartes de differentes dimensions entre celles que l'on veut prendre.

On ne pourroit donner la démonstration de cette formule sans faire de longs discours, & on n'aura pas beaucoup plus de peine à la trouver qu'on en auroit à l'entendre, ainsi voulant laisser le plaisir de l'invention au Lecteur, je me contenterai de l'éclaircir par quelques exemples.

Exemple I. Si Pierre se propose de tirer sept cartes dans cinquante-deux, en sorte qu'il y en ait trois doubles & une simple, on aura par la formule

$$S = \frac{\frac{4}{2}^{3} \times \frac{13}{3} \times \frac{4}{1}^{1} \times \frac{10}{1}}{4 \times 13 \times 17 \times 10 \times 7 \times 47 \times 46} = \frac{6^{3} \times 13 \times 2 \times 11 \times 4 \times 10}{4 \times 13 \times 17 \times 10 \times 7 \times 47 \times 46} = \frac{16632}{900473}.$$

Exemple II. Si Pierre se proposoit de tirer huit cartes dans cinquante-deux, en sorte qu'il y en eût une triple, deux doubles & une simple, on auroit

$$S = \frac{4}{3}^{1} \times \frac{13}{1} \times \frac{4}{2}^{2} \times \frac{12}{2} \times \frac{4}{1}^{1} \times \frac{10}{1}$$

divisé par $13 \times 25 \times 17 \times 7 \times 47 \times 46 \times 9 = \frac{266112}{405211285}$.

Exemple III. Si Pierre se proposoit de tirer treize cartes dans deux jeux entiers composés de 104 cartes, en sorte

qu'il y en eût deux quadruples, deux doubles & une simple, on auroit par la formule

$$S = \frac{\square^{8}_{4} \times \square^{13}_{2} \times \square^{8}_{2} \times \square^{11}_{2} \times \square^{8}_{1} \times \square^{9}_{1}}{103 \times 34 \times 101 \times 14 \times 97 \times 95 \times 94 \times 31 \times 92}$$

$$= \frac{70^{2} \times 13 \times 6 \times 28^{2} \times 11 \times 5 \times 72}{103 \times 34 \times 101 \times 14 \times 97 \times 45 \times 94 \times 31 \times 92}.$$

PROBLÊMES
SUR LE JEU DU PIQUET.
PROPOSITION XV.

Pierre est dernier au Piquet, & est supposé n'avoir point d'as. On demande quelle est son esperance d'en tirer ou un, ou deux, ou trois

ON sçait qu'à ce jeu les Joueurs prennent chacun douze cartes, qu'il en reste huit au talon, dont le premier prend cinq, & le dernier trois.

Cela posé, on trouvera par les propositions 11, 12, 13, que le sort de Pierre pour tirer un as dans les trois cartes est $\frac{8}{19}$

Que son sort pour en prendre deux est $\frac{241}{285}$

Que son sort pour en prendre trois est $\frac{1}{285}$

Et par consequent, que son sort pour en prendre ou un, ou deux, ou trois indéterminément est $\frac{29}{57}$

en sorte qu'il peut parier but-à-but avec avantage qu'il lui en entrera quelqu'un, puisque le juste parti seroit 29 contre 28.

Si l'on suppose que Paul qui est premier en carte n'a point de Rois, on trouvera

Que son sort pour en avoir un est $\frac{455}{969}$

Que son sort pour en avoir deux est $\frac{70}{323}$

Que son sort pour en avoir trois est $\frac{10}{323}$

Que son sort pour en avoir quatre est $\frac{1}{969}$

Donc son sort pour en avoir quelqu'un indéterminé-

ment sera $\frac{232}{323}$; & par consequent il y a à parier deux cens trente-deux contre quatre-vingt-onze, environ cinq contre deux, que le premier n'ayant point de Rois, il lui en entrera quelqu'un en cinq cartes.

PROBLÊME II.

PROPOSITION XVI.

Pierre est dernier, & est supposé ne point porter de carreau. On demande combien il y a à parier qu'il lui rentrera dans ses trois cartes de quoi empêcher que Paul qui est premier ne puisse avoir de quinte ou au dessus.

ON trouvera par les propositions 11, 12, 13, qu'il y a deux cens vingt coups differens qui donnent la huitiéme à Paul:

Qu'il y en a 132 qui lui donnent une septiéme,
168 qui lui donnent une sixiéme,
Et enfin 208 qui lui donnent une quinte;

Et par consequent le juste parti de la gageure seroit 103 contre 182, ce qui seroit un peu moins que trois contre cinq.

Si l'on supposoit que Pierre fût premier en carte, les autres circonstances du Problême restant les mêmes, on trouveroit qu'il y auroit à parier 10433 contre 5071, qu'il rentrera à Pierre dans les cinq cartes de quoi empêcher que Paul ne pût avoir de quinte, ou de sixiéme, ou de septiéme, ou de huitiéme.

Car dans cette seconde supposition il y aura 792 coups qui donneront une huitiéme à Paul,
990 qui lui donneront une septiéme,
1650 qui lui donneront une sixiéme,
1639 qui lui donneront une quinte.

Ce Problême & le precedent pourront être utiles aux Joueurs en quelques occasions, & servir à les déterminer soit dans la maniere d'écarter, soit à proposer ou à accepter avec raison certains partis, par exemple, de remêler les cartes, de donner des points ou la main. Ils pourront aussi servir de modele pour en résoudre une infinité de pareils, qui seront au moins curieux, s'ils ne sont pas tous utiles.

PROBLÊME
SUR LE JEU DE LA TRIOMPHE.

PROPOSITION XVII.

Pierre & Paul jouent en cinq points à la Triomphe, ils en ont chacun trois, Pierre eſt premier, il a le Roy & la Dame troiſiéme de triomphe, qui ſera par exemple de trefle, & un Roy de carreau gardé par le valet: lorſqu'il joue ſon Roy de triomphe pour la premiere carte, Paul lui offre un point. On demande s'il le doit accepter, & quelle eſt, en le refuſant, ſon eſperance de faire la volle.

IL faut d'abord examiner en combien de façons differentes il peut arriver que Paul ait la Dame gardée d'un ou de pluſieurs carreaux indéterminément, retrancher de ce nombre celui qui exprime en combien de façons il peut arriver que Paul ait la Dame troiſiéme en carreau, avec une autre Dame gardée de quelqu'autre couleur, & en retrancher encore la moitié du nombre qui exprime en combien de manieres il peut arriver que Paul ait la Dame gardée de carreau, une autre Dame gardée & une cinquiéme carte quelconque d'une autre eſpece. Le nombre qui reſtera, ces ſouſtractions étant faites, ſera celui qui exprime combien il y a de coups qui peuvent empêcher que Pierre ne faſſe la volle.

On trouvera par les propoſitions 11, 12, 13, 14, qu'il y a 3605 pour le premier cas, 72 pour le ſecond, 240 pour le troiſiéme.

On trouvera auſſi que le nombre qui exprime en combien de façons differentes on peut prendre cinq cartes dans vingt-deux, eſt 26334, & par conſequent on aura le ſort de Pierre dans cette fraction $\frac{23041}{26334}$.

Ainſi l'avantage de Pierre en refuſant la propoſition de Paul ſera exprimé par cette fraction $\frac{4937}{131167}A$. Donc en ſuppoſant que A, qui exprime l'argent du jeu fût deux piſtolles, ſi quelqu'un vouloit achetter les droits de Pierre & ſe met-

tre en sa place, il devroit donner à Pierre sept livres neuf sols & onze deniers outre sa mise.

Il est aisé de voir par là qu'il est plus avantageux à Pierre de tenter la volle, que d'accepter un point; car en l'acceptant son sort ne seroit que $\frac{3}{4}A$, & même un peu moins, puisqu'il y a apparence qu'à ce jeu la primauté donne quelque avantage à un Joueur qui a trois points de cinq contre l'autre quatre. Or il est évident que $\frac{3}{4}A$ est moindre que $\frac{23041}{26334}A$. Donc, &c. Cette solution peut s'appliquer à des cas pareils dans le jeu de l'Hombre, & principalement dans l'Hombre à deux.

PROBLÊME

SUR LE JEU DE L'HOMBRE

PROPOSITION XVIII.

Pierre fait jouer en noir, & est supposé avoir un nombre quelconque de triomphes. On demande quelle espérance il a de tirer un certain nombre de triomphes dans les cartes qu'il prend au talon.

PREMIER CAS.

Pierre a trois triomphes & prend six cartes.

L'ESPERANCE qu'il a de tirer une triomphe au moins dans six cartes, est exprimée par la fraction $\frac{30254}{35061}$; ainsi il pourroit parier 30254 contre 4807, ce qui est un peu plus de six contre un.

L'espérance qu'il a d'en tirer au moins deux est exprimée par la fraction $\frac{366142}{736281}$, en sorte qu'il y auroit à parier 366142 contre 370139.

SECOND CAS.

Pierre a quatre triomphes, & prend cinq cartes.

L'ESPERANCE qu'a Pierre de tirer au moins une triomphe dans ces cinq cartes eſt exprimée par la fraction $\frac{18321}{24173}$; ainſi il pourroit parier 18321 contre 5952, & il auroit de l'avantage à parier trois contre un.

L'eſperance qu'il a de tirer aux moins deux triomphes ſera exprimée par la fraction $\frac{53025}{169911}$, ainſi il pourroit parier 17675 contre 38962.

TROISIE'ME CAS.

Pierre a cinq triomphes, & prend quatre cartes.

L'ESPERANCE qu'a Pierre de tirer au moins une triomphe dans quatre cartes eſt exprimée par la fraction $\frac{4123}{6293}$, ainſi il pourroit parier 4123 contre 2170, un peu moins que deux contre un.

Il ſera facile de réſoudre par les propoſitions 11, 12, 13, un grand nombre d'autres Problêmes de même eſpece que celui-ci, leſquels pourroient ſervir à fixer des regles pour ſçavoir à quel jeu il eſt à propos de jouer ou de paſſer, ou de jouer ſans prendre. Il ſuffiroit pour cela de chercher pour les cartes rouges ce que l'on vient de trouver pour les noires, & de faire entrer dans le calcul les Rois, les differens Matadors & les renonces. On pourroit auſſi déterminer à quel jeu il eſt permis de demander gano; mais l'étendue de ces matieres nous oblige à nous donner des bornes. Il ſuffit de marquer le chemin; ainſi je finirai par le Problême ſuivant qui eſt aſſez facile, & pourra être de quelque uſage.

PROBLÊME II.

PROPOSITION XIX.

Pierre eſt premier en cartes, il a trois Matadors en noir, & cinq autres triomphes quelconques. On demande combien il faut qu'il y ait au jeu pour qu'il lui ſoit plus avantageux de prendre au talon que de jouer ſans prendre.

JE ſuppoſe que chaque Joueur donne une fiche pour le ſans-prendre à celui qui le gagne.

Il faut remarquer que Pierre a trois coups ſur trente-un pour tirer une triomphe, & trois coups ſur trente-un pour tirer un Roy qui ne ſoit pas triomphe, & que dans l'un & l'autre cas la volle lui eſt aſſurée. Cela poſé, ſi l'on nomme f chaque fiche, p ce que Pierre gagneroit en jouant ſans prendre, & b ce qui viendroit à Pierre préciſément de la volle.

Il faudra pour que Pierre ait raiſon de jouer ſans prendre que $6 \times \overline{p - 2f + b} + 25 \times \overline{p - 2f}$ ſoit plus grand que $31p$, & ſi l'on veut ſçavoir en quel cas il lui ſeroit indifférent de prendre ou de jouer ſans prendre. Il n'y a qu'à former cette égalité $6 \times \overline{p - 2f + b} + 25 \times \overline{p - 2f} = 31p$, & en tirer ſelon les regles ordinaires $b = \frac{11}{3}f = 10f + \frac{1}{3}f$. D'où il faut conclure que le profit de la volle doit être au moins de dix fiches & ſix jettons pour que Pierre puiſſe prendre ſans deſavantage; & par conſequent s'il n'y a point de bête au jeu, Pierre prendra ſon parti de prendre ou de ne pas prendre ſelon que ce qui ſera devant chaque joueur ſera ou plus grand ou moindre que 14 jettons, en ſuppoſant qu'on donne deux fiches pour la volle.

Si l'on jouoit l'augmentation des Matadors, & que les triomphes de Pierre fuſſent trois Matadors, la Dame, le valet, le ſept, le ſix & le cinq, l'équation ſeroit $5 \times \overline{p - 2f + b} + 1 \times \overline{p + 10f + b} + 25 \times \overline{p - 2f} = 31p$, dont on tireroit

$b = 8f + \frac{1}{3}f$, c'eſt à dire, qu'il faudroit pour jouer ſans prendre que le profit de la volle fût plus grand que huit fiches & ſix jettons, & par conſequent ſi, n'y ayant point de bête au jeu, il ſe trouve plus de neuf jettons devant chaque joueur, Pierre aura raiſon de prendre, & il jouera ſans prendre s'il y en a neuf ou moins que neuf.

Suppoſons maintenant que Pierre ait quatre Matadors ſeptiémes en pic, & deux fauſſes qui ſeront par exemple, le trois de trefle & le cinq de carreau.

Pour trouver combien il doit y avoir aux tours dans cette ſuppoſition afin qu'il ſoit plus avantageux à Pierre de prendre pour la volle, que de jouer ſans prendre.

Je remarque d'abord qu'il y a 24 coups qui aſſurent la volle à Pierre; car il y en a ſix pour prendre deux triomphes, douze pour prendre une triomphe & un Roy, trois pour prendre deux Roys, & trois pour prendre un Roy gardé de la Dame.

J'obſerve enſuite qu'il y a 117 coups qui rendent le ſort de Pierre incertain pour la volle, ſçavoir, quand il lui entre un Roy gardé, ou une triomphe avec une fauſſe. J'appellerai dans ce cas ſon eſperance x.

On aura $24 \times \overline{p - 2f + b} + 117x + 324 \times \overline{p - 2f} = 465p$.

$$\text{ou } b = \frac{465p - 348p + 696f - 117x}{24}$$

$$\text{ou } b = \frac{696f + 117p - 117x}{24}$$

Si l'on ſuppoſe $x = p - 2f + \frac{1}{5}b$, on aura $b = \frac{4650}{237}f = 19f + \frac{147}{237}f$. On trouvera ainſi differentes valeurs de b ſelon toutes les ſuppoſitions differentes que l'on fera de la valeur de x. Celle qu'on vient de faire ſemble approcher aſſez de la veritable. On pourroit la trouver exactement, mais ce ſeroit un nouveau Problême qui nous meneroit trop loin. Ce Problême eſt plus facile, & d'un uſage plus frequent à l'égard de l'Hombre à deux.

PROBLÊME.

SUR LE BRELAN.

PROPOSITION XX.

Pierre, Paul & Jacques jouent au Brelan, Pierre & Paul tiennent le jeu, & Jacques passe. La carte qui retourne est le Roy de cœur, Pierre est premier, il a l'as & le Roy de carreau, & l'as de cœur. Paul a l'as, le neuf & le huit de trefle. Deux des Spectateurs, qui ont vû chacun les jeux de Pierre & de Paul, & n'ont point vû celui de Jacques, disputent pour sçavoir lequel des deux Joueurs Pierre & Paul a le plus beau jeu, & le plus d'esperance de gagner. L'un des deux, nommé Jean, parie pour Pierre : l'autre, nommé Thomas, parie pour Paul. L'argent de la gageure est nommé A. *On demande quel est le sort des deux Spectateurs Jean & Thomas, & ce qu'ils devroient mettre chacun au jeu pour parier sans avantage ni desavantage.*

IL faut remarquer, 1°, que Jean gagnera, si les trois cartes de Jacques sont ou trois cœurs ou trois carreaux. 2°. Qu'il gagnera encore si l'une des trois étant un pique ou un trefle, les deux autres sont ou deux cœurs ou deux carreaux. 3°. Que si l'une des trois cartes de Jacques est un cœur ou un carreau, les deux autres étant des piques, Jean aura gagné. 4°. Qu'il gagnera encore si les trois cartes de Jacques sont un carreau, un cœur & un pique, & que dans toute autre disposition des cartes de Jacques il a perdu.

Cela posé, il ne reste plus qu'à examiner combien il y a d'hazards differens, qui donnent chacune de ces quatre dispositions differentes des trois cartes de Jacques. On trouvera par les propositions 11, 12, 13, 14, qu'il y en a vingt pour la premiere, deux cens vingt pour la seconde, deux cens dix pour la troisiéme, & cent soixante-quinze pour

la quatriéme ; & par conſequent le ſort de Jean ſera $\frac{125}{266}A = \frac{1}{2}A - \frac{4}{133}A$, ce qui fait voir que la condition de Pierre eſt moins avantageuſe que celle de Paul, & que Jean pour parier également contre Thomas, devroit mettre au jeu 125 contre 141.

PROBLÉME.

SUR L'IMPERIALE.

PROPOSITION XXI.

Pour avoir un Imperiale au jeu qui porte ce nom, il faut avoir ou quatre as, ou quatre Rois, ou quatre Dames, ou quatre valets, ou quatre ſept, ou quatriéme majeure, ou carte blanche. On demande combien un Joueur peut parier qu'il lui viendra un Imperiale déterminé, par exemple un Imperiale d'as, ou carte blanche.

ON connoîtra par les propoſitions 12, 13, 14, que ſur le nombre 225792840, qui exprime en combien de façons on peut prendre douze cartes dans trente-deux, il y en a 3108195 pour avoir un Imperiale d'as, & 125970 pour avoir carte blanche.

Le ſort d'un Joueur, qui pariroit à l'Imperiale ou au Piquet d'avoir carte blanche, ſeroit donc exprimé par la fraction $\frac{123}{578956}$, ainſi il auroit de l'avantage à parier 1 contre 1792, & du deſavantage à parier 1 contre 1791.

PROBLÊME
SUR
LE QUINQUENOVE.

SECONDE PARTIE.

EXPLICATION DE CE JEU.

ON tire d'abord entre les Joueurs à qui aura le cornet. Suppoſons qu'il tombe à Pierre ; & pour faire entendre le Jeu plus facilement, ſuppoſons qu'il n'y a que deux Joueurs, Pierre & Paul. Celui-ci mettra d'abord au jeu une certaine ſomme ; alors Pierre pouſſant les dez, voici ce qui arrive. Si Pierre amene cinq ou neuf, il perd, & donne le cornet à Paul. Si Pierre amene ou trois, ou onze, ou un doublet, il tire la miſe de Paul. Celui-ci remet au jeu, & Pierre continue de jouer. Si Pierre n'amene aucun des coups préce-

dents, il n'aura ni perdu, ni gagné. Pour expliquer ce qui arrive en ce cas, ſuppoſons, par exemple, que Pierre ait amené ſept du premier coup. On remarquera, 1°, que Pierre rejouant, ne pourra gagner cette miſe de Paul qu'en amenant ſept. 2°. Que Paul eſt dans la liberté de riſquer une nouvelle miſe, & que Pierre ſera pareillement dans la liberté de la tenir, ou de ne la pas tenir. 3°. Que Paul pour diſtinguer cette miſe de la précedente, la met deſſous, & qu'elle ſe nomme maſſe. 4°. Que ſi cette maſſe eſt égale à la miſe, elle ſe nomme maſſe au jeu; & que quand elle n'eſt pas la même, elle ſe nomme maſſe aux dez. 5°. Que Pierre ayant accepté cette nouvelle maſſe, il gagnera en amenant le coup ſuivant, ou trois, ou onze, ou doublet, ou bien en amenant dans la ſuite cette chanſe avant que d'amener cinq ou neuf; mais qu'il ne peut gagner la premiere miſe qui eſt dite entrée au jeu, qu'en amenant ſept; & enfin qu'il les perdra toutes deux en amenant ou cinq ou neuf.

Suppoſons preſentement pour une plus ample explication, que Pierre ayant dit, *Taupe à la maſſe*, amene de ſon ſecond coup huit autrement que par doublet, c'eſt à dire par ſix & deux, ou par cinq & trois, & que Paul mette au jeu une nouvelle maſſe que Pierre accepte. On remarquera, 1°, que Pierre gagnera cette maſſe en amenant ou trois, ou onze, ou doublet. 2°. Qu'il gagnera la premiere miſe de Paul en amenant ſept, & la ſeconde en amenant huit. 3°. Qu'il perd les deux miſes & la maſſe en amenant ou cinq ou neuf, & qu'alors il cede le cornet à Paul.

Ce que je viens d'expliquer pour un petit nombre de coups, & ſeulement à l'égard de deux Joueurs, doit s'entendre de tout autre nombre de coups & de Joueurs.

PROBLÈME

PROPOSITION XXII.

Pierre & Paul jouent au Quinquenove, & Pierre tient le cornet. Je suppose que la mise de Paul soit toujours la même, & exprimée par A. *Je suppose aussi que Pierre n'acceptera point de masse, mais qu'il sera obligé de tenir le jeu jusqu'à ce qu'il ait perdu ; après quoi je suppose le jeu fini. On demande quel est à ce jeu l'avantage & le desavantage de celui qui a le dé ; ou, ce qui revient au même, combien Pierre devroit demander ou donner à un tiers pour lui ceder le cornet, & lui donner à jouer en sa place.*

SOLUTION.

LE sort de Pierre lorsqu'il pousse le dé, est d'avoir huit coups pour perdre, sçavoir cinq qui arrive en quatre façons, & neuf qui arrive pareillement en quatre façons ; d'avoir dix coups pour gagner, sçavoir les six doublets, trois, qui arrive en deux façons, & onze, qui arrive pareillement en deux façons ; d'avoir quatre coups pour amener six autrement que par doublet, autant pour amener huit autrement que par doublet, deux coups pour amener quatre autrement que par doublet, deux coups pour amener dix autrement que par doublet, & enfin six coups pour amener sept.

Donc si je nomme x le sort de Pierre lorsqu'il a amené huit ou six, z son sort lorsqu'il a amené quatre ou dix, y son sort lorsqu'il a amené sept, q l'avantage ou le desavantage que Pierre trouve à continuer le jeu lorsqu'il a gagné, & S son sort en general. On aura le sort cherché de Pierre

$$S = \frac{10 \times 2\overline{A} + q + 8x + 4z + 6y}{36}.$$

Il faut presentement chercher les valeurs des inconnues x, z, y & q.

Pour déterminer la valeur de l'inconnue x, je remarque que Pierre ayant amené du premier coup six sans doublet,

il a en rejouant cinq coups pour gagner, huit coups pour perdre, & vingt-trois coups pour rejouer.

On aura donc $x = \frac{5}{13} \times \overline{2A+q}$.

On trouvera de même $y = \frac{3}{7} \times \overline{2A+q}$.

Et $z = \frac{3}{11} \times \overline{2A+q}$.

Maintenant si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'égalité proposée, on aura

$$S = \frac{10 \times \overline{2A+q} + 8 \times \frac{5}{13} \times \overline{2A+q} + 4 \times \frac{3}{11} \times \overline{2A+q} + 6 \times \frac{3}{7} \times \overline{2A+}}{36}$$

$$= \frac{10 \times \overline{2A+q} + \frac{6746}{1001} \times \overline{2A+q}}{36} = \frac{4189}{9009} \times 2A + \frac{4189}{9009} q$$

Pour connoître la valeur de q, il faut remarquer que si q étoit $= 0$, ce qui arriveroit si Pierre & Paul convenoient que le jeu dût finir aussitôt que Pierre auroit gagné. Alors le sort de Pierre seroit $\frac{8378}{9009} A = A - \frac{631}{9009} A$; d'où il est clair que la quantité $\frac{631}{9009} A$ exprimeroit le desavantage que Pierre auroit à ce jeu.

On observera pareillement que si Pierre & Paul convenoient avant que de jouer, que Pierre ayant gagné une fois, continuera de jouer jusqu'à ce qu'il ait ou gagné de nouveau ou perdu, le desavantage de Pierre seroit $\frac{631}{9009} A + \frac{4189}{9009} \times \frac{631}{9009} A$.

Et que si l'on suppose indéterminément suivant la regle de ce jeu, que Pierre continuera de tenir la Banque jusqu'à ce qu'il ait perdu, son desavantage sera exprimé par cette suite infinie $\frac{631}{9009} A + \frac{4189}{9009} \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^2 \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^3 \times \frac{631}{9009} A + \overline{\frac{4189}{9009}}^4 \times \frac{631}{9009} A +$ &c. La somme de cette suite est $= \frac{1}{8} A + \frac{57}{9640} A = 1$ l. 6. s. 2 $\frac{46}{241}$ d. supposé que la mise de Paul fût une pistolle.

Et ce seroit là le desavantage de Pierre s'il jouoit contre un joueur qui à chaque fois qu'il perdroit mît A au jeu, & de qui Pierre ne tint jamais aucune masse.

Ainsi Pierre peut compter que sur chaque pistolle qu'un des joueurs met au jeu, soit que ce soit un enjeu ou une masse, il y a pour lui 14 s. $\frac{74}{9009}$ de pure perte, ce qui est

un

un peu plus que la quinziéme partie de ſa miſe, & un peu moins que la quatorziéme. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cet avantage eſt aſſez conſiderable, principalement lorſqu'il y a un grand nombre de Joueurs, pour obliger ceux qui tiennent le dé à refuſer les maſſes, ce qui ôte tout l'agrément de ce jeu. Il ſeroit donc à propos de le reformer en le rendant plus égal, & en donnant un peu d'avantage à celui qui tient le dé, pour l'engager à tenir les maſſes. Pour cela il faudroit convenir que le nombre 4 amené au ſecond coup, gagnât auſſibien que 3 & 11. Alors l'avantage de celui qui tient le dé par raport à la miſe de chaque joueur, ſeroit exprimé par la fraction $\frac{97}{9009}$, qui eſt à peu près la quatre-vingt-treiziéme partie de l'unité.

PROBLÉME

SUR LE JEU DU HAZARD.

EXPLICATION DE CE JEU.

ON y joue avec deux dés comme au Quinquenove. Nommons encore Pierre celui qui tient le dé, & ſuppoſons que Paul repreſente les autres Joueurs. Pierre pouſſera le dé juſqu'à ce qu'il ait amené ou 5, ou 6, ou 8, ou 9; celui de ces nombres qui ſe preſentera le premier ſervira de chanſe à Paul, enſuite Pierre recommencera à pouſſer le dé pour ſe donner ſa chanſe. Or les chanſes de Pierre ſont ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ou 10, en ſorte qu'il en a deux plus que Paul, ſçavoir 4 & 10. Il faut encore ſçavoir ce qui ſuit:

1°. Si Pierre après avoir donné à Paul une chanſe qui ſoit ou 6 ou 8, amene au ſecond coup ou la même chanſe, ou douze, il gagne; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou onze, il perd.

2°. S'il a donné à Paul la chanſe de 5 ou de 9, & qu'il amene au coup ſuivant la même chanſe, il gagne; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou onze, ou douze, il perd.

3°. S'il a donné à Paul la chanſe de 7, & qu'il amene le coup ſuivant ou la même chanſe, ou onze, il gagne ; mais s'il amene ou bezet, ou deux & as, ou douze, il perd.

4°. Pierre s'étant donné une chanſe differente de celle de Paul, il gagnera s'il amene ſa chanſe avant que d'amener celle de Paul, & il perdra s'il amene la chanſe de Paul avant que d'amener la ſienne.

5°. Quand Pierre & Paul ont perdu, on recommence le jeu, en donnant de nouvelles chanſes ; mais Pierre ne quitte le dé pour le donner à celui qui le ſuit, que lorſqu'il a perdu.

6°. S'il y a pluſieurs Joueurs, ils ont tous la même chanſe.

PROBLEME.

PROPOSITION XXIII.

On demande quel eſt à ce jeu l'avantage ou le deſavantage de celui qui tient le dé.

SOIT ſuppoſé que la miſe de Paul ſoit $\frac{1}{2}A$.

1°. Si la chanſe de Paul eſt 6 ou 8, le ſort de Pierre ſera $\frac{6A + 8 \times \frac{4}{9}A + 6 \times \frac{6}{11}A + 6 \times \frac{1}{8}A + \frac{5}{2}A}{36} = \frac{6961}{14256}A$.

2°. Si la chanſe de Paul eſt 7, le ſort de Pierre ſera $\frac{8A + 8 \times \frac{4}{10}A + 6 \times \frac{3}{9}A + 10 \times \frac{5}{11}A}{36} = \frac{244}{495}A$.

3°. Si la chanſe de Paul eſt ou 5 ou 9, le ſort de Pierre ſera $\frac{4A + 4 \times \frac{1}{2}A + 10 \times \frac{5}{9}A + 6 \times \frac{3}{7}A + 6 \times \frac{6}{10}A}{36} = \frac{1396}{2835}A$

Par conſequent le ſort de Pierre ſera

$$\frac{10 \times \frac{6961}{14256}A + 6 \times \frac{244}{495}A + 8 \times \frac{1396}{2835}A}{24},$$

& ſon deſavantage ſera

$$\frac{10 \times \frac{167}{14256}A + 6 \times \frac{7}{990}A + 8 \times \frac{43}{5670}A}{24} = \frac{37}{4032}A.$$

Cette fraction qui exprime le desavantage de Pierre par raport à la mise de Paul, est plus petite que $\frac{1}{108}$, & plus grande que $\frac{1}{109}$.

Mais parceque ce desavantage continue tant que Pierre continue d'avoir le dé, le desavantage de Pierre considéré en general est exprimé par une suite infinie dont la somme est $\frac{37}{2053}A$, en sorte que si $\frac{1}{2}A$ designe une pistolle, il y a 3 s. 8 $\frac{1}{21}$ d. de pure perte pour lui sur chaque pistolle, & Pierre pourroit sans desavantage donner 7 s. 2 $\frac{1042}{2053}$ d. à celui qui s'offriroit de tenir le dé en sa place.

REMARQUE I.

C'Est la coutume des Joueurs à ce jeu de ne mettre leur argent que lorsqu'on leur a livré chanse. Or il est évident que cet usage est préjudiciable à celui qui tient le dé, car puisque son desavantage est environ $\frac{1}{85}$, lorsque la chanse des Joueurs est 6 ou 8, & seulement $\frac{1}{111}$ lorsque leur chanse est ou 5 ou 9, & $\frac{1}{141}$ lorsque leur chanse est 7, il est clair que si les Joueurs connoissoient avec exactitude leur interest, ils hazarderoient plus d'argent lorsque leur chanse est ou 5 ou 9, que lorsquelle est 7, & plus encore lorsqu'elle est 6 ou 8, que lorsqu'elle est 7 ou 5 ou 9. Il seroit donc à propos que les Joueurs missent leur argent au jeu avant que celui qui tient le dé leur eût livré chanse.

REMARQUE II.

ON voit que ce jeu est assez égal, mais il le seroit davantage si l'on convenoit que Pierre ayant amené du premier coup 7, gagnât au second coup en amenant ou la même chanse, ou 11 ou 12, & qu'il perdît seulement en amenant ou bezet ou deux & as; car je trouve que par cette reforme celui qui tient le dé auroit de l'avantage, mais ce ne seroit que d'un sol & deux deniers sur chaque pistolle, ce qui est peu considerable.

PROBLÊMES
SUR LE JEU DE L'ESPERANCE.

EXPLICATION DE CE JEU.

ON y joue avec deux dés. Les Joueurs conviennent de prendre un certain nombre de jettons, & tirent enſuite à qui aura le dé. Cela fait, ſi celui qui a le dé amene un as, il donne un jetton à celui qui eſt à ſa gauche ; s'il amene un ſix, il met un jetton au jeu ; s'il amene ſix & as, & qu'il ait plus d'un jetton, il en payera un à ſa gauche & un au jeu : mais s'il n'en a qu'un, il le mettra au jeu. Dans tous ces cas celui qui a le dé après avoir payé, cede le cornet à celui qui le ſuit à la droite. S'il amene un doublet, il a la liberté ou de rejouer dans l'eſperance d'amener encore deux doublets de ſuite, ce qui le feroit gagner, ou de ceder le dé à celui qui le ſuit à la droite. S'il amene tout autre coup, c'eſt à dire, s'il n'amene ni as, ni ſix, ni doublets, il cede le cornet, ſans rien payer à celui qui eſt à ſa droite ; enfin celui-là gagne l'argent du jeu, qui le premier amene trois doublets de ſuite, ou qui conſerve quelque jetton, tous les autres Joueurs ayant perdu les leurs.

Il eſt à remarquer que quand on n'a plus de jettons, on ne joue plus, & qu'on ne peut rentrer au jeu (ce qui ſe nomme reſuſciter) que par le ſecours de celui qu'on a pour voiſin à la droite lorſqu'il amene un as.

PROBLÈME.

PROPOSITION XXIV.

Pierre, Paul & Jacques prennent chacun un jetton, & s'accordent que celui qui reſtera avec quelques jettons, les autres n'en ayant plus, gagnera une certaine ſomme dont ils conviennent. L'on ſuppoſe que Pierre a le dé, que Paul eſt à ſa droite & Jacques à ſa gauche. On demande quel eſt le ſort des trois Joueurs, c'eſt à dire, quel eſt l'avantage & le deſavantage que donne à chacun la ſituation & la place où il ſe trouve.

SOIT *A* l'argent du jeu, & *S* le ſort de Pierre au commencement du jeu.

Il faut remarquer d'abord que Pierre pouſſant le dé a ſix coups ſur trente-ſix pour amener un doublet; 2°. qu'il a deux coups pour amener ſix & as; 3°. huit coups pour amener un as d'un dé, l'autre dé n'étant ni as ni ſix; ces huit coups ſont as & deux, as & trois, as & quatre, as & cinq, deux & as, trois & as, quatre & as, cinq & as: 4°. huit coups pour amener un ſix d'un dé, l'autre dé n'étant ni as ni ſix; ces huits coups ſont ſix & deux, ſix & trois, ſix & quatre, ſix & cinq; deux & ſix, trois & ſix, quatre & ſix, cinq & ſix.

Cela poſé, il eſt clair que le ſort de Pierre lorſqu'il va jouer eſt, 1°, d'avoir huit coups, pour que n'ayant rien Jacques ait deux jettons, & Paul un jetton & le dé, ſçavoir quand Pierre amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. d'avoir dix coups, pour que n'ayant rien Jacques ait un jetton & Paul un jetton & le dé, ſçavoir quand Pierre amene un ſix ſans doublet; 3°. d'avoir dix-huit coups, pour que Pierre, Paul & Jacques, ayant chacun un jetton, Paul ait le dé.

Si l'on nomme x le ſort de Pierre dans le premier cas, y ſon ſort dans le ſecond cas, z ſon ſort dans le troiſiéme cas, on aura $S = \frac{8x + 10y + 18z}{36} = \frac{4x + 5y + 9z}{18}$.

Pour déterminer x, il faut remarquer que Pierre n'ayant rien, Jacques ayant deux jettons, & Paul ayant un jetton & le dé, le ſort de Pierre lorſque Paul va pouſſer le dé eſt, 1°, d'avoir huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. dix coups qui le font perdre & finiſſent la partie, ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans doublet; 3°. d'avoir dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait deux jettons & le dé, & Paul un jetton.

Si l'on nomme u le ſort de Pierre dans le premier cas, & t ſon ſort dans le troiſiéme, on aura $x = \frac{8u+10\times 0+18t}{36} = \frac{4u+9t}{18}$.

Pour déterminer u, il faut obſerver que Paul n'ayant rien, Pierre ayant un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Jacques va pouſſer le dé eſt, 1°, d'avoir deux coups, pour que Jacques n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Pierre un jetton & le dé, ſçavoir quand Jacques amene ſix & as; 2°. huit coups qui remettent le jeu comme au commencement, ſçavoir quand Jacques amene un as ſans ſix ni doublet; 3°. huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Pierre un jetton & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans as ni doublet; 4°. dix-huit coups pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait deux jettons, & Pierre un jetton & le dé.

Si l'on nomme p le ſort de Pierre dans le premier cas, q ſon ſort dans le troiſiéme cas, r ſon ſort dans le quatriéme cas, on aura $u = \frac{2\times p+8\times s+8\times q+18r}{36} = \frac{p+4s+4r+9r}{18}$.

Pour déterminer p, ſoit l le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Paul un jetton & le dé, on aura $p = \frac{10\times 0+8\times y+18l}{36}$. Or $l = \frac{18\times A+18\times p}{36}$. Donc $p = \frac{4y+9\times\frac{A+p}{2}}{18} = \frac{8y+9A+9p}{36}$; d'où l'on tire $p = \frac{8y+9A}{27}$, & $l = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\times\frac{8y+9A}{27} = \frac{18A+4y}{27}$.

Pour déterminer q, ſoit appellé K le ſort de Pierre lorſ.

que Paul n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Jacques un jetton & le dé, on trouvera $q = \frac{18\times 0+18\times K}{36}$, & $K = \frac{10\times A+8\times p+18\times q}{36}$; d'où l'on tire $q = \frac{5A+4p}{27}$. Or on a eu ci-devant $p = \frac{8y+9A}{27}$; donc $q = \frac{5A+4\times\frac{8y+9A}{27}}{27} = \frac{171A+32y}{27\times 27}$.

Il eſt évident que $r = \frac{18\times 0+18\times u}{36} = \frac{1}{2}u$.

On aura (en ſubſtituant ces valeurs de p, q, r) $u = 2\times\frac{8y+9A}{27}+8\times S+8\times\frac{171A+32y}{27\times 27}+18\times\frac{1}{2}u$, ce qui ſe réduit à $u = \frac{688y+1854A+5832S}{19683}$; donc $r = \frac{344y+927A+2916S}{19683}$.

Pour déterminer la valeur de t, il faut remarquer que Pierre n'ayant rien, Paul ayant un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Jacques va pouſſer le dé eſt, 1°. d'avoir deux coups pour perdre, ſçavoir quand Jacques amene ſix & as; 2°. huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Paul deux jettons & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un as ſans ſix ni doublet; 3°. huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Paul un jetton & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans as ni doublet; 4°. dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Jacques ait deux jettons, & Paul un jetton & le dé.

Cela poſé, ſi l'on nomme c le ſort de Pierre dans le ſecond cas, on aura $t = \frac{2\times 0+8\times c+8\times y+18\times x}{36} = \frac{4c+4y+9x}{18}$.

Pour déterminer la valeur de c, on remarquera que Pierre n'ayant rien, Jacques ayant un jetton, & Paul deux jettons & le dé, le ſort de Pierre lorſque Paul va pouſſer le dé eſt, 1°, d'avoir deux coups, pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene ſix & as; 2°. d'avoir huit coups, pour que les trois Joueurs ayent chacun un jetton, Jacques ayant le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 3°. d'avoir huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Jacques un

jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans as ni doublet; 4°. d'avoir dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Paul ait deux jettons, & Jacques un jetton & le dé.

Si l'on nomme le ſort de Pierre dans le ſecond cas m, dans le troiſiéme cas n, dans le quatriéme b, on aura

$$c = \frac{2 \times K + 8m + 8n + 18b}{36} = \frac{K + 4m + 4n + 9b}{18}.$$

Pour déterminer m, ſoit h le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Paul a deux jettons, & Pierre un jetton & le dé, on aura

$$m = \frac{10 \times p + 8 \times h + 18 \times S}{36} = \frac{5p + 4h + 9S}{18}.$$

Pour déterminer h, ſoit B le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Paul deux jettons & le dé, on aura

$$h = \frac{10 \times o + 8 \times c + 18 \times B}{36} = \frac{4c + 9B}{18}.$$

Pour déterminer B, ſoit D le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Paul a un jetton, & Pierre deux jettons & le dé, on aura

$$B = \frac{2 \times A + 8 \times p + 8 \times D + 18b}{46} = \frac{A + 4p + 4D + 9b}{18}.$$

Pour déterminer D, ſoit E le ſort de Pierre lorſque Jacques n'ayant rien, Pierre a deux jettons, & Paul un jetton & le dé, on aura

$$D = \frac{2 \times y + 8 \times z + 8l + 18 \times E}{36} = \frac{y + 4z + 4l + 9E}{18},$$

$$\& \; E = \frac{18 \times A + 18D}{36} = \frac{A + D}{2}.$$

Si l'on ſubſtitue les valeurs de E, D, B, h, dans les équations précedentes, on trouvera

$$D = \frac{86y + 387A + 216z}{27 \times 27}.$$

$$B = \frac{2A + 8p + 8D + 4c}{27}.$$

$$h = \frac{8c + A + 4p + D}{27}.$$

Et enfin $m = \frac{151p + 243S + 32c + 4A + 16D}{27 \times 18}$.

On trouvera auſſi

$$n = \frac{18 \times o + 18 \times y}{36} = \frac{1}{2}y.$$

$$b = \frac{18 \times o + 18 \times c}{36} = \frac{1}{2}c.$$

Pour

Pour déterminer la valeur de y, il faut remarquer que Pierre n'ayant rien, Jacques ayant un jetton, & Paul un jetton & le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir huit coups pour que Paul n'ayant rien, Pierre ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ni doublet; 2°. dix coups pour perdre, ſçavoir quand Paul amene un ſix; 3°. dix-huit coups, pour que Pierre n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé.

Cela poſé, on aura $y = \frac{8\times K + 10\times o + 18n}{36} = \frac{4K+9n}{18}$; & ſubſtituant dans cette équation pour K ſa valeur $\frac{5A+4P+9Y}{18}$, & pour n ſa valeur $\frac{1}{2}y$, on aura

$$y = 4\times 5A + 4\times \frac{8Y+9A}{27} + 9\times \frac{171A+32Y}{27\times 27} + \frac{9}{2}y,$$

$$\frac{}{18}$$

d'où l'on tire, en tranſpoſant & reduiſant, $y = \frac{2736}{19171}A$.

Pour déterminer la valeur de z, je remarque que Pierre, Paul & Jacques ayant chacun un jetton, & Paul ayant le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir dix coups, pour que Paul n'ayant rien, il ait un jetton, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un ſix ſans doublet; 2°. huit coups, pour que Paul n'ayant rien, il ait deux jettons, & Jacques un jetton & le dé, ſçavoir quand Paul amene un as ſans ſix ou doublet; 3°. dix-huit coups, pour que Pierre, Paul & Jacques ayant chacun un jetton, Jacques ait le dé.

Si l'on nomme G le ſort de Pierre dans le ſecond cas, on aura $z = \frac{10\times K + 8\times G + 18\times m}{36} = \frac{5K+4G+9m}{18}$.

Pour déterminer G, je remarque que Paul n'ayant rien, Pierre ayant deux jettons, & Jacques un jetton & le dé, le ſort de Pierre eſt, 1°, d'avoir dix coups pour gagner, ſçavoir quand Jacques amene un ſix ſans doublet; 2°. huit coups, pour que Jacques n'ayant rien, Paul ait un jetton, & Pierre deux jettons & le dé, ſçavoir quand Jacques amene un as, ſans ſix ni doublet; 3°. dix-huit coups, pour que Paul n'ayant rien, Jacques ait un jetton, & Pierre deux jettons & le dé.

Si l'on nomme F le ſort de Pierre dans le dernier cas, on aura $G = \frac{10\times A + 8\times D + 18\times F}{36}$.

Pour déterminer F, ſoit L le ſort de Pierre lorſque Paul n'ayant rien, Pierre a un jetton, & Jacques deux jettons & le dé, on aura

$$F = \frac{2\times 0 + 8\times L + 8\times K + 18\times G}{36} = \frac{4L + 4K + 9G}{18}.$$

On trouvera auſſi

$$L = \frac{8\times S + 2\times p + 8\times q + 18\times r}{36} = \frac{4S + p + 4q + 9r}{18}.$$

Si l'on ſubſtitue les valeurs de G, de m & K dans l'égalité $z = \frac{5K + 4G + 9m}{18}$, on aura

$$z = \frac{153351A + 160299p + 1152637 + 1823315 + 67809 + 116647 + 23328\epsilon + 17280z}{708598};$$

& ſubſtituant de nouveau pour r ſa valeur $\frac{344y + 927A + 2916S}{19683}$, & pour c ſa valeur

$$\frac{134847A + 519048p + 714092y + 177147q + 708588S + 13824z}{4257657},$$

on trouvera, en tranſpoſant & reduiſant,

$$z = \frac{1164320103080791 5088}{2378002760298882 3717}A.$$

On aura auſſi

$$m = \frac{7117013810993376514}{2378002760298882 3717}A;$$

& par conſequent

$$S = \frac{5029812761187532115}{2378002760298882 3717}A.$$

Ainſi le ſort des trois Joueurs Pierre, Paul & Jacques, ſera comme les trois nombres

5029812761187532115, 7117013810993376514, 1164320103080791 5088.

Il faut remarquer que dans ce Problême on n'a pas eu lieu d'examiner s'il étoit avantageux au Joueur de recommencer lorſqu'il amene de ſon coup un doublet, dans l'eſperance d'en amener trois de ſuite; mais cette conſideration auroit lieu ſi en ſuppoſant (ainſi qu'il ſe fait ſouvent) qu'il ſuffit pour gagner d'amener deux doublets de

ſuite, il ſe trouvoit un plus grand nombre de Joueurs ou ſeulement deux Joueurs qui euſſent chacun pluſieurs jettons. On pourroit donner là deſſus des regles certaines, ainſi que l'on va voir dans le Problême qui ſuit.

PROBLÊME II.

PROPOSITION XXV.

Pierre & Paul ont un nombre quelconque de jettons. L'on demande en quel cas ils doivent recommencer lorſqu'ils amenent un doublet. L'on ſuppoſe qu'ils gagneront en amenant deux doublets de ſuite.

PREMIER CAS.

Pierre & Paul n'ont qu'un jetton chacun, & c'eſt à Pierre à jouer. L'on demande quel eſt ſon ſort.

POUR reſoudre ce Problême, il faut faire des ſuppoſitions touchant la maniere de jouer de Pierre & de Paul, car il peut arriver, 1°, que Pierre & Paul recommenceront lorſqu'ils auront un doublet; 2°. qu'ils ne recommencent dans ce cas ni l'un ni l'autre; 3°. que Pierre recommence, & que Paul ne recommence pas; 4°. que Pierre ne recommence pas, & que Paul recommence. Or ſelon toutes ces differentes ſuppoſitions, le ſort de Pierre ſera different.

1°. Si le deſſein de Pierre & de Paul eſt de ne point recommencer lorſqu'ils auront un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{1}{3}A$, & celui de Paul $\frac{2}{3}A$.

2°. Si le deſſein de Pierre & de Paul eſt de recommencer lorſqu'ils auront un doublet, le ſort de Pierre eſt $\frac{3}{10}A$, & celui de Paul $\frac{7}{10}A$.

3°. Si le deſſein de Pierre eſt de ne pas recommencer, & celui de Paul de recommencer, en cas de doublet ſon ſort ſera $\frac{21}{38}A$, & celui de Paul $\frac{37}{38}A$.

4°. Si le deſſein de Pierre eſt de recommencer, & celui de Paul de ne pas recommencer, ſon ſort ſera $\frac{8}{29}A$, & celui de Paul $\frac{21}{29}A$.

Il ſuit de là que Pierre, & par conſequent Paul, doivent ceder le cornet ſans recommencer lorſqu'ils ont amené un doublet.

Pour s'aſſurer ſi Pierre & Paul doivent recommencer lorſqu'ils ont amené un doublet, il ſuffit d'examiner ſi le ſort de Pierre eſt plus grand ou moindre lorſqu'ils recommencent tous deux, que lorſque ni l'un ni l'autre ne recommence.

SECOND CAS.

Pierre a un jetton contre Paul deux jettons, & c'eſt à Pierre à jouer.

1°. SI l'on ſuppoſe que ni Pierre ni Paul ne recommenceront lorſqu'ils auront un jetton contre deux, & qu'ils auront amené un doublet, on trouvera que le ſort de Pierre eſt $\frac{19}{105}A$, & celui de Paul $\frac{86}{105}A$.

2°. Si l'on ſuppoſe qu'ils recommenceront l'un & l'autre lorſqu'ayant un jetton contre deux, ils auront amené un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{1162}{6993}A$, & celui de Paul $\frac{5831}{6993}A$.

TROISIE'ME CAS.

Pierre & Paul ont chacun deux jettons, & Pierre a le dé.

1°. SI l'on ſuppoſe qu'ils ne recommenceront ni l'un ni l'autre lorſqu'ils auront un jetton contre trois, on trouvera le ſort de Pierre $= \frac{30763}{73185}A$, & celui de Paul $\frac{42422}{73185}A$. On trouvera auſſi que le ſort de Pierre lorſqu'il a un jetton contre trois, & que c'eſt à lui à jouer, eſt $\frac{16498}{73185}A$.

2°. Si l'on ſuppoſe qu'ils recommenceront l'un & l'autre lorſqu'ayant un jetton contre trois, ils auront amené un doublet, le ſort de Pierre ſera $\frac{14989417}{354361335}A$, & celui de Paul $\frac{20446718}{354361335}A$.

Il ſuit de là que Pierre ne doit point recommencer, lorſqu'ayant un jetton contre Paul trois jettons, il amene un doublet.

On pourra en cette ſorte examiner ſi Pierre doit ou ceder le dé à Paul, ou recommencer lorſqu'il a un jetton

contre quatre, ou deux contre trois; le calcul ſera le même que celui de ce Problême & du précedent, mais la longueur en ſeroit exceſſive, ainſi je ne conſeille à perſonne de le tenter. Il y a beaucoup d'apparence que Pierre doit recommencer & tenter de gagner en amenant deux doublets de ſuite, lorſqu'ayant un jetton contre quatre, il a amené un doublet; car je trouve que dans le troiſiéme & dernier cas, la difference du ſort de Pierre lorſqu'il ne recommence pas, à ſon ſort quand il recommence, eſt $\frac{2344889\,32}{24698986095}A$, ce qui eſt moins qu'un centiéme.

PROBLÊMES
SUR LE TRICTRAC.

IL eſt tres utile, pour jouer le Trictrac agreablement & avec avantage, de ſçavoir à chaque coup de dé, l'eſperance qu'on a ou de battre, ou de remplir, ou de couvrir quelqu'une de ſes dames par le coup qu'on va jouer. C'eſt auſſi ce que ſçavent aſſez les bons Joueurs; mais ce n'eſt que par une grande application & beaucoup d'exercice qu'on peut en acquerir l'habitude pour les cas qui ſont un peu compoſés. Par exemple, il y a peu de perſonnes qui puiſſent voir d'un coup d'œil que leur petit jan étant diſpoſé ainſi que dans le côté *A* du Trictrac, ils ayent un coup pour gagner douze points, dix coups pour en gagner huit, trois coups pour en gagner ſix, ſeize coups pour en gagner quatre, & enfin ſix coups pour ne pas remplir. Mais ce qui paſſe extremement les connoiſſances ordinaires des Joueurs, & ce qui leur ſeroit neanmoins tres important pour bien jouer les dames, & faire des tenuës à propos, c'eſt de pouvoir connoître avec exactitude l'eſperance que l'on a de tenir un certain nombre de coups ſans rompre, ou d'arranger ſon jeu de telle ou telle façon, en deux ou pluſieurs coups. On peut découvrir toutes ces choſes par les methodes précedentes: En voici deux Exemples fort ſimples, dont le dernier peut avoir quelque utilité.

PROBLÈME I.

PROPOSITION XXVI.

Pierre parie qu'il prendra ſon grand coin en deux coups. On demande ce qu'il doit gager pour que le parti ſoit égal.

IL faut remarquer, 1°, que Pierre ne peut gagner qu'en amenant du premier coup de dé l'un de ces quatre coups, ſix cinq, quine ou ſonnés.

2°. Qu'ayant amené l'un de ces quatre coups, il n'a pas encore gagné; mais qu'ayant amené ſix cinq du premier coup, il doit pour gagner amener encore ſix cinq au ſecond coup; & qu'ayant amené du premier coup quine, il doit pour gagner amener au ſecond coup ſonnés; & qu'ayant amené du premier coup ſonnés, il doit pour gagner amener au ſecond coup ou quine ou ſonnés. Il ſuit de tout cela que le ſort de Pierre ſera $\frac{2}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{7}{1296}$; ainſi Pierre pour parier ſans deſavantage, doit mettre au jeu 7 contre 1289, & il auroit de l'avantage à parier 1 contre 186 de prendre ſon grand coin en deux coups.

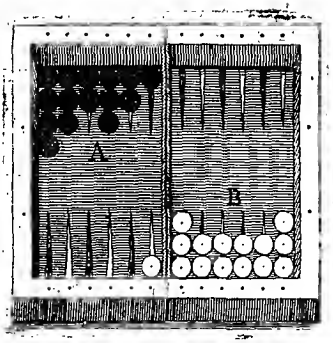
PROBLÈME II.

PROPOSITION XXVII.

Mes dames étant diſpoſées ainſi qu'il paroît dans le côté B *du Trictrac, je veux ſçavoir combien je pourrois parier de tenir deux coups ſans rompre.*

LES hazards des deux coups ſont ici mêlés enſemble, & ne ſe doivent point conſiderer independamment l'un de l'autre. Si avantageux que puiſſe être mon premier coup, il eſt clair que mon ſecond coup peut me faire perdre; & au contraire ſi deſavantageux qu'il ſoit, il ne m'ôte point l'eſperance de tenir au ſecond coup. La plus grande

partie des coups de dé que je peux amener au premier coup, diverſifient mon attente pour l'évenement du ſecond, mais il y en a qui me laiſſent une égale eſperance. Par exemple il m'eſt indifferent d'amener au premier coup ſonnés ou cinq & as, ou quatre & deux; ſix trois ou cinq & quatre, &c. Pour démêler tout cela, il faut chercher quelle eſt mon eſperance de tenir au ſecond coup dans toutes les differentes ſuppoſitions des differens coups de dé que je peux amener au premier coup. La ſomme de tous ces hazards exprimera mon ſort, on trouvera que j'ai, 1°, deux coups qui me donnent $\frac{1}{36}$, ſçavoir ſix & cinq.



2°. Trois coups qui me donnent $\frac{2}{36}$, ſçavoir ſix quatre & quine, puiſqu'ayant amené ſix quatre ou quine du premier coup, j'ai pour tenir ſonnés & ſix & as.

3°. Quatre coups qui me donnent $\frac{6}{36}$, ſçavoir ſix trois, & cinq & quatre, car j'aurai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix deux & bezet.

4°. Quatre coups qui me donnent $\frac{10}{36}$, ſçavoir ſix deux, & cinq & trois, car j'ai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix deux, ſix trois, deux & as & bezet.

5°. Deux coups qui me donnent $\frac{12}{36}$, ſçavoir quatre & trois, car j'aurai pour tenir au ſecond coup ſonnés, ſix & as, ſix deux, ſix trois, deux & as, trois & as & bezet.

6°. Quatre coups qui me donnent $\frac{15}{36}$, ſçavoir ſix & as, & cinq & deux, car j'aurai pour tenir ſix & as, ſonnés, ſix deux, bezet, ſix trois, deux & as, ſix quatre, trois & as, & double deux.

7°. Six coups qui me donnent $\frac{21}{36}$, ſçavoir ſonnés, cinq & as, quatre & deux & ternes, car j'aurai pour tenir ſonnés, ſix & as, ſix deux, bezet, ſix trois, deux & as, ſix

quatre, trois & as, double deux, ſix cinq, quatre & as, trois & deux.

8°. Quatre coups qui me donnent $\frac{23}{36}$, ſçavoir quatre & as, & trois & deux, car j'ai pour tenir tous les mêmes coups que ſi j'euſſe amené du premier coup cinq & as, & outre cela l'eſperance d'amener au ſecond coup cinq & as.

9°. Un coup qui me donne $\frac{8}{36}$, ſçavoir carme, car j'aurai pour tenir au ſecond coup deux & as, bezet, ſix & as, ſix deux & ſonnés.

10°. Trois coups qui me donnent $\frac{27}{36}$, ſçavoir trois & as, & double deux, car j'ai tout pour tenir au ſecond coup, excepté cinq & quatre, cinq & trois, quatre & trois, quine, carme & terne.

11°. Deux coups qui me donnent $\frac{32}{36}$, ſçavoir deux & as, car j'aurai tous les coups favorables pour tenir, excepté quine, carme, & cinq & quatre.

12°. Un coup qui me donne $\frac{35}{36}$, c'eſt bezet, car il n'y aura au ſecond coup que quine contre moi.

Le ſort cherché ſera donc $\frac{565}{1296}$, & le juſte parti de la gageure ſeroit 565 contre 731. On auroit de l'avantage à parier 3 contre 4, & du deſavantage à parier 4 contre 5.

AVERTISSEMENT.

IL eſt impoſſible dans la pluſpart des ſituations où deux Joueurs peuvent ſe trouver au Trictrac, de déterminer quel eſt leur ſort, & d'eſtimer avec préciſion de quel côté eſt l'avantage, car outre la varieté prodigieuſe des differentes diſpoſitions poſſibles des trente dames, la maniere ſouvent arbitraire dont les Joueurs conduiſent leur jeu, eſt ce qui decide preſque toujours du gain de la partie. Or tout ce qui dépend de la fantaiſie des hommes n'ayant aucune regle fixe & certaine, il eſt clair qu'on ne peut reſoudre aucune queſtion ſur le Trictrac, à moins que la maniere de jouer ne ſoit déterminée. Le ſeul Problême que l'on puiſſe reſoudre d'une maniere generale ſur le jeu

du

du Trictrac est celui-ci : *Trouver le sort de deux Joueurs qui en sont au jan de retour, quelque nombre de dames qu'ils ayent encore à passer, en quelque endroit qu'elles se trouvent placées.* J'en donne ici un Exemple, qui suffira pour faire connoître de quelle maniere on pourroit trouver les autres cas plus composés.

PROBLÈME III.

PROPOSITION XXVIII.

Pierre a les trois dames A, B, C *à lever, & Paul les trois dames* D, E, F; *celui qui le premier aura levé en passant toutes ses dames, gagnera. On suppose que c'est à Pierre à jouer, l'on demande quel est l'avantage de Paul.*

LORSQUE Pierre va jouer, il a vingt-cinq coups pour passer les deux plus reculées B & C, huit pour passer les dames A & C, sçavoir six & as, cinq & as, quatre & as, trois & as; deux coups pour passer les dames A & B, & un coup seulement pour passer B, sçavoir bezet.

Soit nommé S le sort de Pierre lorsqu'il va jouer, x son sort quand il amene deux & as, & y son sort quand il amene du premier coup bezet. On aura $S = \frac{33A+2x+y}{36}$. L'argent du jeu est appellé A.

Il s'agit presentement de déterminer les inconnues x & y; pour en venir à bout, il faut remarquer que Pierre n'ayant plus à lever que la dame C, ne peut ni perdre ni gagner par le coup que jouera Paul; mais que son sort sera different selon tous les differens coups que Paul amenera. Car, par exemple, Paul passant de son premier coup les deux dames E & F, si Pierre ne passe pas de son second coup la dame C, il aura certainement perdu, au lieu qu'il pourroit encore gagner si Paul n'eût passé de son premier coup que les dames E & D, ou seulement la dame E.

Soit donc nommé u le sort de Pierre, lorsqu'ayant amené du premier coup deux & as, Paul a passé de son coup les dames E & F; h son sort, quand Paul a passé les dames D & E; & t son sort, quand Paul a passé la dame E. On aura $x = \frac{33u+2h+t}{36}$.

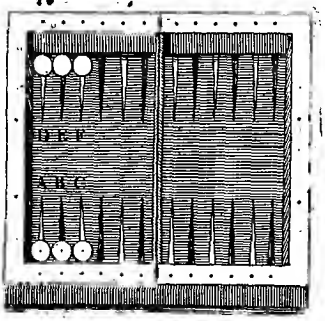
Pour connoître la valeur de u, on remarquera que Pierre n'ayant plus que la dame C à paſſer, il a en jouant ſon ſecond coup, trente-cinq coups pour gagner.

Pour connoître la valeur de b, on obſervera que Pierre n'ayant plus que la dame C à paſſer, & Paul n'ayant plus que la dame F, Pierre a en jouant de nouveau, trente-cinq coups pour gagner, & un coup pour avoir $\frac{1}{36}A$: car ſuppoſé que Pierre jouant pour la ſeconde fois, amene bezet qui eſt le ſeul coup qui puiſſe l'empêcher de gagner, Paul n'a pas pour cela gagné, il pourra amener auſſi bezet, auquel cas Pierre auroit gagné.

Pour connoître la valeur de t, on prendra garde que Pierre n'ayant plus que la dame C, & Paul les deux dames D & F à lever, Pierre a en jouant pour la ſeconde fois, trente-cinq coups pour gagner, & un coup pour avoir $\frac{4}{36}A$: car Pierre ne gagnant pas de ſon ſecond coup, Paul a pareillement quatre coups pour ne pas lever toutes ſes dames, ſçavoir bezet, double deux, deux & as. On aura donc $t = \frac{35}{36}A + \frac{4}{36\times 36}A$. Ayant ainſi déterminé les inconnues u, b, t, ſi on ſubſtitue les valeurs trouvées dans l'équation $x = \frac{33u+2b+t}{36}$, on aura $x = \frac{4.5366}{46656}A$.

Preſentement il faut déterminer la valeur de y.

Soit nommé q le ſort de Pierre lorſqu'il va jouer ſon ſecond coup, & qu'il lui reſte les dames A & C à lever, & à Paul la ſeule dame D ; p ſon ſort lorſqu'il lui reſte à lever les dames A & C, & à Paul la dame F ; n ſon ſort lorſqu'il lui reſte à lever les dames A & C, & à Paul les dames D & F. On aura $y = \frac{33q+2p+n}{36}$.



On trouvera, par des raisonnements semblables à ceux qu'on a faits pour trouver la valeur de x, $q = \frac{12}{36}A$, $p = \frac{12}{36}A + \frac{4}{36\times 36}A$, $n = \frac{12}{36}A + \frac{4\times 4}{36\times 36}A$; & par conséquent $y = \frac{41496}{46656}A$. Ayant ainsi déterminé les valeurs de x & de y, on trouvera $S = \frac{46641}{46656}A$.

PROBLÊME

SUR LE JEU DES TROIS DEZ.

EXPLICATION DES REGLES DE CE JEU.

QUOIQUE ce jeu soit ancien & en usage dans les Academies de Jeu, il n'est guere connu que des Joueurs de profession. Je crois donc devoir en expliquer avec soin toutes les conditions.

On nommera Pierre celui qui tient le dé, & Paul representera les autres Joueurs, dont le nombre est indéterminé, ainsi qu'aux Jeux du *Hazard* & du *Quinquenove*.

Pierre poussera le dé jusqu'à ce qu'il amene ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, ou 13, celle de ces chanses que Pierre amenera sera ce que l'on nomme la chanse *droite*, & sera à peu près pour lui, ce qu'est au jeu de la Dupe, pour le Joueur qui a la main, la carte qu'il se donne. Ensuite Pierre pousse le dé : voici par ordre les principales regles.

1°. La chanse *droite* étant ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, Pierre gagnera au second coup s'il amene chanse pareille, c'est à dire 9 si la chanse *droite* est 9, 10 si la chanse *droite* est 10, &c. Il gagnera aussi en amenant quinze; mais il perdra s'il amene ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 16, ou 17, ou 18.

2°. Si la chanse *droite* est ou 8, ou 13, Pierre gagnera au second coup en amenant ou chanse pareille, ou 16; & il perdra s'il amene ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 15, ou 17, ou 18.

3°. Dans tout autre cas que les deux précedents, le nombre que Pierre amenera, après avoir tiré la chanse *droite*, sera une chanse pour la premiere masse. Il y a donc

pour les maſſes deux chanſes de plus que pour la *droite*, ſçavoir 7 & 14.

4°. Ces deux chanſes étant données, Pierre continuera de pouſſer le dé, & il gagnera la premiere maſſe, s'il en amene la chanſe avant que d'amener la droite; & au contraire il perdra s'il amene la droite avant que d'amener cette chanſe. Dans le premier cas le jeu recommence, & Pierre livre de nouveau une droite & une chanſe à la premiere maſſe, pourvû neanmoins qu'il n'ait pas *tingué*.

Pour apprendre ce que c'eſt que *tinguer*, il faut ſçavoir qu'à ce jeu, ainſi qu'au Quinquenove, les Joueurs peuvent faire des maſſes, & que Pierre les accepte s'il veut, en diſant, *Taupe*. Mais il y a ceci à remarquer, que ſi Pierre en acceptant une maſſe, dit *Taupe & tingue*, la premiere maſſe ne va plus; en ſorte que ſi Pierre amene la droite après avoir tingué, il perd toutes les maſſes qui ont été acceptées, à l'exception de la premiere qui ne va pas, & il tire celle qu'on vient de maſſer. Dans ce cas la droite & la chanſe de la premiere maſſe ſubſiſtent; & ſi Pierre après avoir tingué amene la chanſe de la premiere maſſe, toutes les maſſes deviennent nulles, à l'exception de la droite & de la premiere maſſe qui ſubſiſtent.

5°. Toutes les fois que Pierre perd la premiere maſſe, celui qui ſert le dé à Pierre peut le contraindre à tenir le paroli; & ſi cela arrive une ſeconde fois, à tenir le ſept & le *va*, & enſuite le quinze & le *va*, &c.

6°. Lorſque Pierre perd la premiere maſſe, on lui fixe ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12, ou 13, mais il n'eſt obligé de tenir que 8 ou 13.

Pour faire entendre parfaitement toutes ces regles, je crois qu'il eſt à propos de les appliquer à un Exemple. Suppoſons donc que la droite ſoit 13, la premiere maſſe 9, la ſeconde 10, la troiſiéme 11, là deſſus je fais une maſſe. Pierre dit, *Taupe*, & pouſſant le dé il amene 13. Voici ce qui arrivera; 1°. il gagnera ce qui vient d'être maſſé; 2°. il perdra toutes les autres maſſes, & je lui fixerai 13 en faiſant, ſi je veux, le paroli de cette maſſe, enſuite il ſe donnera une chanſe.

Si Pierre au lieu de dire ſimplement *Taupe*, eût dit : *Taupe & tingue*, tout auroit été comme ci-devant, avec cette ſeule difference qn'il n'eût point perdu la premiere maſſe, & qu'elle ſeroit reſtée auſſi-bien que la droite.

Suppoſons maintenant que Pierre amene 9 aprés avoir dit *Taupe*, il tirera la premiere maſſe qui eſt 9, toutes les autres maſſes s'en iront, & Pierre recommencera le jeu en tirant une droite au hazard. S'il eût dit, *Taupe & tingue*, Pierre n'auroit ni perdu, ni gagné, & toutes les chanſes euſſent été nulles, à l'exception de la premiere qui ſubſiſtera avec la droite. Enfin lorſque Pierre amenera ou 10, ou 11 avant que d'amener 13, il gagnera celle de ces maſſes qu'il amenera avant la droite.

PROBLÈME.

PROPOSITION XXIX.

On demande quel eſt à ce Jeu l'avantage ou le deſavantage de celui qui tient le dé.

SOIT x le ſort de Pierre lorſqu'il amene pour chanſe droite 8 ou 13, y ſon ſort lorſqu'il amene ou 9 ou 12, & z lorſqu'il amene 10 ou 11.

S exprimera le ſort de Pierre, & A la miſe de Paul. On aura $S = \frac{21x + 25y + 27z}{73}$. On trouvera auſſi

$$x = \frac{100A + 50 \times \frac{25}{23}A + 27 \times \frac{9}{4}A}{216} = \frac{19789}{19872}A.$$

$$y = \frac{95A + 42 \times \frac{21}{23}A + 27 \times \frac{27}{13}A + 15 \times \frac{3}{2}A}{216} = \frac{126731}{129168}A.$$

$$z = \frac{101A + 21 \times \frac{7}{4}A + \frac{25 \times 25}{13}A + 30 \times \frac{5}{7}A}{216} = \frac{15147}{26208}A.$$

Par conſequent le deſavantage de Pierre ſera exprimé par cette quantité, $\frac{21 \times \frac{83}{19872}A + 25 \times \frac{2437}{129168}A + 27 \times \frac{3183}{78624}A}{73}$,

qui ſe reduit à cette fraction $\frac{149410\frac{1}{2}}{66004848}A$ qui eſt plus grande que $\frac{1}{45}$, & plus petite que $\frac{1}{44}$, & ce ſeroit là le deſavantage cherché, ſi l'on ſuppoſoit que Pierre dût quitter le dé & finir le jeu auſſitôt qu'il auroit ou gagné ou perdu. Ainſi la premiere maſſe étant une piſtolle, il y a ſur cette ſomme 4 ſols 7 den. de perte pour Pierre lorſqu'il doit tirer ſa droite au hazard. Mais lorſqu'on lui a fixé 8 ou 13, ſon deſavantage par raport à la premiere maſſe, n'eſt que 10 d. $\frac{5}{237}$. On verra dans les Remarques qui ſuivent quel eſt ſon deſavantage en acceptant des maſſes.

REMARQUE I.

IL eſt moins deſavantageux à Pierre d'avoir 8 ou 13 pour chanſe droite, que d'avoir 9 ou 12; & il lui eſt moins deſavantageux d'avoir 9 ou 12, que d'avoir 10 ou 11: car je trouve que la chanſe droite étant 8 ou 13, le deſavantage de Pierre par raport à la miſe de Paul, eſt plus grand que $\frac{1}{240}A$, & plus petit que $\frac{1}{239}A$: Que la chanſe droite étant ou 9 ou 12, le deſavantage de Pierre eſt plus grand que $\frac{1}{54}A$, & moindre que $\frac{1}{53}A$; & enfin que la chanſe droite étant 11 ou 10, ſon deſavantage eſt plus grand que $\frac{1}{25}$, & plus petit que $\frac{1}{24}$.

REMARQUE II.

POUVOIR tinguer eſt un privilege que ce Jeu accorde à celui qui tient le cornet, par lequel il eſt maître de faire durer long-temps la droite & la premiere maſſe. Il eſt aiſé de s'appercevoir que cet avantage eſt fort peu conſiderable, & a lieu ſeulement lorſque la chanſe de la droite doit arriver plus ſouvent que la chanſe de la premiere maſſe; par exemple lorſque la droite étant 10 ou 11, la premiere maſſe eſt 8 ou 13. Dans ce cas il vaut mieux tinguer que de tauper ſimplement; mais il ſeroit encore plus à propos de ne point accepter de maſſe.

REMARQUE III.

IL n'y a dans ce jeu aucune circonſtance où celui qui tient le cornet ait de l'avantage ſur les Joueurs. Voici la regle qu'il doit ſuivre pour que ſon deſavantage ſoit le moindre qu'il ſera poſſible. Il n'acceptera point de maſſes lorſque la droite ſera 9 ou 12, & encore moins lorſqu'elle ſera 10 ou 11: car dans le premier cas il a ſur une maſſe d'une piſtolle trois ſols neuf deniers de perte, & dans le ſecond huit ſols deux deniers.

REMARQUE IV.

ON voit par les obſervations précedentes, qu'il s'en manque beaucoup que ce Jeu ne ſoit ni auſſi égal, ni auſſi-bien inventé que bien des Joueurs ſe l'imaginent. Pour le reformer il ſeroit à propos de regler que 17 fût auſſi-bien que 15 un hazard favorable à celui qui tient le cornet, ſoit que la droite ſoit ou 9, ou 10, ou 11, ou 12. Par cette reforme le deſavantage de Pierre qu'on a trouvé $= \frac{1494103}{66004848} A$, ſera exprimé par cette fraction $\frac{188071}{66004848} A$, ce qui vaut un peu moins de ſept deniers, A deſignant une piſtolle.

DE'FINITION.

J'APPELLERAI dez ſimples les dez de differente eſpece, ou qui marquent differens points; dé double, deux dez de même eſpece, ou qui marquent les mêmes points, par exemple, double deux, ternes, &c. dé triple, trois dez de même eſpece, par exemple, trois as ou trois deux, &c. & ainſi dé quadruple, quintule, ſextuple, &c. quatre ou cinq ou ſix dez d'une même eſpece.

PROBLEME.

PROPOSITION XXX.

Soit un nombre de dez quelconque. Pierre parie que les jettant au hazard, il en amenera tant d'une espece, tant d'une autre; par exemple, tant de simples, tant de doubles, tant de triples, ou tant de doubles, tant de quadruples, &c. On demande quel sera son sort, & combien il aura de façons differentes d'amener les dez en la maniere qu'il se le sera proposé.

SOIT p le nombre de dez, q le nombre de tous les divers arrangemens possibles de ces dez; b l'exposant du dé qui a la plus haute dimension entre tous ceux que Pierre se propose d'amener; c, d, e, f, &c. l'exposant des autres dez qu'il doit amener, dont l'exposant doit être moindre, en sorte que c exprime un nombre plus petit que b, & d un nombre plus petit que c, & e un nombre plus petit que d, & f un nombre plus petit que e, &c.

Je nommerai aussi B le nombre des dez que l'on demande de la dimension exprimée par b, C le nombre des dez que l'on demande de la dimension exprimée par c, D le nombre des dez que l'on demande de la dimension exprimée par d, E le nombre des dez que l'on demande de la dimension exprimée par e, F le nombre des dez que l'on demande de la dimension exprimée par f, &c.

J'appellerai encore k, l, m, n, r, &c. les nombres qui expriment tous les divers arrangemens possibles des nombres designés par les lettres b, c, d, e, f, &c. J'exprimerai aussi par cette marque $\overset{6}{\underset{B}{\square}}$ le nombre qui exprime en combien de façons B peut être pris dans 6, mettant le plus petit nombre dessous, & le plus grand dessus, & entre deux cette marque arbitraire $\square$, ainsi que dans la proposition XIV.

Tout cela posé, le sort de Pierre sera exprimé par une fraction, dont le numerateur sera q multiplié par cette

suite

suite de produits, $\frac{6}{B} \times \frac{6-B}{C} \times \frac{6-B-C}{D} \times \frac{6-B-C-D}{E} \times \frac{6-B-C-D-E}{F} \times$ &c. & le dénominateur sera 6^p multiplié par cette suite de produits, $B \times k \times C \times l \times D \times m \times E \times n \times F \times r \times$ &c.

Il faut remarquer, 1°, que cette formule étant appliquée à un cas particulier, ne doit être composée, soit dans le numerateur, soit dans le dénominateur, que d'autant de produits qui sont marqués par $\times$, qu'il y a de differentes dimensions entre les dez qu'on veut amener.

2°. Que si les dez, au lieu d'avoir six faces en avoient un nombre quelconque exprimé par R, il n'y auroit qu'à substituer R au lieu de 6 dans cette formule. Mais il faut observer qu'alors la formule deviendroit une suite infinie, R étant indéterminé. Enfin pour avoir le nombre des coups favorables à Pierre, il n'y a qu'à multiplier cette formule par 6 élevé à l'exposant p. Je ne donnerai point la demonstration de cette formule, car elle ne pourroit être qu'extrêmement longue & abstraite, & ne seroit entendue que de ceux qui seront eux-mêmes capables de la trouver.

Je me contenterai de donner ici une Table fort étendue, qui en facilitera l'intelligence, & qui découvrira en partie l'usage de ce Problême. Cette Table donne tous les differens cas du Problême proposé depuis deux dez jusqu'à neuf inclusivement. La premiere colonne donnera tous les cas déterminés, ce qui fait une espece particuliere du Problême general : la seconde les donne indéterminés conformément à l'énoncé du Problême. Ainsi, par exemple, on trouvera que le nombre 3 exprime combien il y a de façons differentes d'amener bezet & un deux avec trois dez, & le nombre 90 qui est vis à vis à la seconde colonne, combien il y a de façons differentes d'amener un double quelconque avec un simple aussi quelconque ; & de même le nombre 12 exprimera combien il y a de manieres differentes d'amener bezet, un deux & un trois

avec quatre dez, & le nombre 720, combien il y en a pour amener un double & deux ſimples.

TABLE.

Pour deux dez.

		Déterminés.	Indéterminés.
1°.	pour avoir deux ſimples,	2	il y a 30 coups.
2°.	un doublet,	1	6

Pour trois dez.

1°.	pour avoir trois ſimples,	6	il y a 120 coups.
2°.	un double & un ſimple,	3	90
3°.	un triple,	1	6

Pour quatre dez.

1°.	pour avoir quatre ſimples,	24	il y a 360 coups.
2°.	un double & deux ſimples,	12	720
3°.	deux doubles,	6	90
4°.	un triple & un ſimple,	4	120
5°.	un quintuple,	1	6

Pour cinq dez.

1°.	pour avoir cinq dez ſimples,	120	il y a 720 coups.
2°.	un double & trois ſimples,	60	3600
3°.	deux doubles & un ſimple,	30	1800
4°.	un triple & deux ſimples,	20	1200
5°.	un triple & un double,	10	300
6°.	un quadruple & un ſimple,	5	150
7°.	un quintuple,	1	6

Pour ſix dez.

1°.	pour avoir ſix ſimples,	720	il y a 720 coups.
2°.	un double & quatre ſimples,	360	10800
3°.	deux doubles & deux ſimples,	180	16200
4°.	trois doubles,	90	1800
5°.	un triple & trois ſimples,	120	7200
6°.	un triple, un double & un ſimple,	60	7200
7°.	deux triples,	20	300
8°.	un quadruple & deux ſimples,	30	1800
9°.	un quadruple & un double,	15	450
10.	un quintuple & un ſimple,	10	180
11.	un ſextuple,	1	6

Pour sept dez.

	Déterminés.	Indéterminés.
1°. pour avoir un double & cinq simples,	2520	15120
2°. deux doubles & trois simples,	1260	75600
3°. trois doubles & un simple,	630	37800
4°. un triple & quatre simples,	840	25200
5°. un triple, un double & deux simples,	420	75600
6°. un triple & deux doubles,	210	12600
7°. deux triples & un simple,	140	8400
8°. un quadruple & trois simples,	210	12600
9°. un quadruple, un double & un simple,	105	12600
10. un quadruple & un simple,	35	1050
11. un quintuple & deux simples,	42	2520
12. un quintuple & un double,	21	630
13. un sextuple & un simple,	7	210
14. un septuple,	1	6

il y a ... coups.

Pour huit dez.

1°. pour avoir deux doubles & quatre simpl.	10080	151200
2°. trois doubles & deux simples,	5040	302400
3°. quatre doubles,	2520	37800
4°. un triple & cinq simples,	6720	40320
5°. un triple, un double & trois simples,	3360	403200
6°. un triple, deux doubles & un simple,	1680	302400
7°. deux triples & deux simples,	1120	100800
8°. deux triples & un double,	560	33600
9°. un quadruple & quatre simples,	1680	50400
10. un quadruple, un double & deux simpl.	840	151200
11. un quadruple & deux doubles,	420	25200
12. un quadruple, un triple & un simple,	280	33600
13. deux quadruples,	70	1050
14. un quintuple & trois simples,	336	20160
15. un quintuple, un double & un simple,	168	20160
16. un quintuple & un triple,	56	1680
17. un sextuple & deux simples,	56	3360
18. un sextuple & un double,	28	840
19. un septuple & un simple,	8	240
20. un octuple,	1	6

il y a ... coups.

Pour neuf dez.

	Déterminés.		Indéterminés.
1°. pour avoir trois doubles & trois ſimples,	45360		907200
2°. quatre doubles & un ſimple,	22680		680400
3°. un triple, un double & quatre ſimples,	30240		907200
4°. un triple, deux doubles & deux ſimples,	15120		2721600
5°. un triple & trois doubles,	7560		453600
6°. deux triples & trois ſimples,	10080		604800
7°. deux triples, un double & un ſimple,	5040		907200
8°. trois triples,	1680		33600
9°. un quadruple & cinq ſimples,	15120		90720
10. un quadruple, un double & trois ſimpl.	7560		907200
11. un quadruple, deux doubles & un ſimple,	3780		680400
12. un quadruple, un triple & deux ſimples,	2520		453600
13. un quadruple, un triple & un double,	1260	il y a	151200 coups.
14. deux quadruples & un ſimple,	630		37800
15. un quintuple & quatre ſimples,	3024		90720
16. un quintuple, un double & deux ſimpl.	1512		272160
17. un quintuple & deux doubles,	756		45360
18. un quintuple, un triple & un ſimple,	504		60480
19. un quintuple & un quadruple,	126		3780
20. un ſextuple & trois ſimples,	504		30240
21. un ſextuple, un double & un ſimple,	252		30240
22. un ſextuple & un ſimple,	84		2520
23. un ſeptuple & deux ſimples,	72		4320
24. un ſeptuple & un double,	36		1080
25. un octuple & un ſimple,	9		270
26. un noncuple,	1		6

REMARQUE.

SI les jeux de dez ſont en ſi petit nombre, & ſe jouent ſeulement avec deux dez, ou tout au plus avec trois, à la difference des jeux de cartes qui ſe jouent avec un fort grand nombre de cartes, il y a bien de l'apparence que cela vient de ce qu'on n'a pu calculer les hazards qui ſe trouvent entre pluſieurs dez. En effet cela étoit fort difficile. La Table précedente, & celles qu'on trouvera dans les propoſitions qui ſuivent juſqu'à la fin de cette ſeconde Partie, donneront là deſſus toutes les lumieres qu'on pourra ſouhaiter, & ſerviront à ceux qui voudroient inventer des

jeux de dez plus variez, & par conſequent plus agreables que tous ceux qu'on a connus juſqu'à preſent.

PROBLÈME.

PROPOSITION XXXI.

On demande en combien de façons on peut amener un certain nombre ou point déterminé, avec un certain nombre de dez.

TOus les Joueurs de Trictrac ſçavent en combien de façons chaque point depuis deux juſqu'à douze, peut s'amener. Mr Huguens en a donné une Table pour deux & pour trois dez : mais on ne peut aller plus loin ſans methode, car cela devient tout d'un coup extrémement compoſé. On trouvera en examinant la ſolution du Problême précedent, que celui-ci y eſt renfermé. Voici une Table qui détermine tous ces hazards depuis deux dez juſqu'à neuf incluſivement.

TABLE.

Avec deux dez.

Il y a	coups qui donnent
1	2 ou 12
2	3 ou 11
3	4 ou 10
4	5 ou 9
5	6 ou 8
6	7

Avec trois dez.

Il y a	coups qui donnent
1	3 ou 18
3	4 ou 17
6	5 ou 16
10	6 ou 15
15	7 ou 14
21	8 ou 13
25	9 ou 12
27	10 ou 11

Avec quatre dez.

Il y a	coups qui donnent
1	4 ou 24
4	5 ou 23
10	6 ou 22
20	7 ou 21
35	8 ou 20
56	9 ou 19
80	10 ou 18
104	11 ou 17
125	12 ou 16
140	13 ou 15
146	14

Avec cinq dez.

Il y a	coups qui donnent
1	5 ou 30
5	6 ou 29
15	7 ou 28
35	8 ou 27
70	9 ou 26
126	10 ou 25
205	11 ou 24
305	12 ou 23
360	13 ou 22
480	14 ou 21
561	15 ou 20
795	16 ou 19
930	17 ou 18

Avec six dez.

Il y a			
	1		6 ou 36
	6		7 ou 35
	21		8 ou 34
	56		9 ou 33
	126		10 ou 32
	252		11 ou 31
	456		12 ou 30
	756	coups qui	13 ou 29
	1161	donnent	14 ou 28
	1666		15 ou 27
	2247		16 ou 26
	2856		17 ou 25
	3431		18 ou 24
	3906		19 ou 23
	4221		20 ou 22
	4332		21

Avec sept dez.

Il y a			
	1		7 ou 42
	7		8 ou 41
	28		9 ou 40
	84		10 ou 39
	210		11 ou 38
	462		12 ou 37
	917		13 ou 36
	1667		14 ou 35
	2807	coups qui	15 ou 34
	4417	donnent	16 ou 33
	6538		17 ou 32
	9142		18 ou 31
	12117		19 ou 30
	15267		20 ou 29
	18327		21 ou 28
	20993		22 ou 27
	22967		23 ou 26
	24017		24 ou 25

Avec huit dez.

Il y a			
	1		8 ou 48
	8		9 ou 47
	36		10 ou 46
	120		11 ou 45
	330		12 ou 44
	792		13 ou 43
	1708		14 ou 42
	3368		15 ou 41
	6147		16 ou 40
	10480		17 ou 39
	16808	coups qui	18 ou 38
	25488	donnent	19 ou 37
	36688		20 ou 36
	50288		21 ou 35
	65808		22 ou 34
	82384		23 ou 33
	98813		24 ou 32
	113688		25 ou 31
	125588		26 ou 30
	133288		27 ou 29
	135954		28

Avec neuf dez.

Il y a			
	1		9 ou 54
	9		10 ou 53
	45		11 ou 52
	165		12 ou 51
	495		13 ou 50
	1287		14 ou 49
	2994		15 ou 48
	6354		16 ou 47
	12465		17 ou 46
	22825		18 ou 45
	39303		19 ou 44
	63999	coups qui	20 ou 43
	98979	donnent	21 ou 42
	145899		22 ou 41
	205560		23 ou 40
	277464		24 ou 39
	359469		25 ou 38
	447669		26 ou 37
	536569		27 ou 36
	619569		28 ou 35
	689715		29 ou 34
	740619		30 ou 33
	767394		31 ou 32

On trouvera par cette Table que onze, par exemple, s'amene en deux façons avec deux dez, en 27 façons avec trois dez, en 104 façons avec quatre dez, en 205 façons avec cinq dez, &c.

COROLLAIRE.

ON peut ſans avantage ni deſavantage jouer avec trois dez au paſſe-dix, & avec cinq dez au paſſe-dix-ſept, & avec ſept dez au paſſe-vingt-quatre, & ainſi de ſuite, en ajoutant toujours 7. Mais il faut remarquer que le nombre des dez étant pair, on ne peut faire de pareil parti, puiſqu'il y a toujours un certain point qu'on peut amener plutôt que tout autre: avec deux dez, c'eſt 7; avec quatre dez, c'eſt 14; avec ſix dez, c'eſt 21, &c. en ajoutant toujours 7.

REMARQUE.

IL faut obſerver que les Joueurs ont établi tant pour le jeu de la Raſle que pour le Paſſe-dix, qu'il n'y auroit de coups bons que ceux où il ſe trouveroit au moins deux dez ſemblables. Je ne peux deviner ce qui a occaſionné cette regle qui ne ſert qu'à amuſer les Joueurs, puiſqu'il y a à chaque coup cinq contre quatre à parier que le coup qu'on va jouer ne ſera pas bon; & je croirois qu'on ne feroit pas mal de l'abolir, en établiſſant que tous les coups fuſſent bons, ou ſi l'on veut (en renverſant la regle ordinaire) que ceux-là ſeuls fuſſent reputés pour bons où tous les dez marqueroient differens points; ainſi on auroit moins de ces coups inutiles qui ennuyent preſque toujours & les Joueurs & les Spectateurs. Au reſte avec l'un ou l'autre de ces changemens le Paſſe-dix ſeroit toujours un jeu égal. La Table précedente le prouve dans la ſuppoſition que tout coup ſoit reputé bon. Je ferai voir dans la ſuite que ce jeu ſeroit encore égal, en ſuppoſant qu'il n'y eût de coups de bons que ceux où tous les dez ſeroient differens, ou bien, ſelon la regle ordinaire de ce

jeu, qu'il n'y ait de bons que ceux où il se trouve au moins deux dez semblables.

PROBLÊME.

PROPOSITION XXXII.

On demande combien on peut amener de coups differens avec un certain nombre de dez donné à volonté.

IL faut remarquer, 1°, que chaque dé ayant six faces, deux dez produisent necessairement trente-six coups, & trois dez deux cens seize coups, ce qui est le cube de six, & quatre dez douze cens quatre-vingts seize coups, ce qui est la quatriéme puissance de six. 2°. Que dans les trente-six coups que donnent deux dez, il y en a six qui ne peuvent arriver que d'une façon, sçavoir les six doublets, & qu'il y en a quinze, sçavoir 6 & as, 6 & 2, 6 & 3, 6 & 4, 6 & 5; 5 & as, 5 & 2, 5 & 3, 5 & 4; 4 & as, 4 & 2, 4 & 3; 3 & as, 3 & 2; 2 & as, qui chacun peuvent arriver en deux manieres, car celui des deux dez qui a amené un as, l'autre dé étant un six, peut être un six, l'autre étant un as, & ainsi des autres. Il est donc certain qu'il n'y a que vingt & un coups differens dans deux dez, quoique réellement il y ait trente-six coups dans deux dez.

On peut remarquer la même chose pour trois dez, par exemple as, as & 2 peut arriver en trois façons, car chacun des trois dez pourra être un deux, les deux autres étant des as; & de même as, 2, 3 peut arriver en six façons, car l'un des trois dez marquant un as, chacun des deux autres peut être ou un deux ou un trois; & l'un des trois dez étant un deux, chacun des deux autres peut être ou un as ou un trois; & enfin l'un des trois dez étant un trois, chacun des deux autres peut être ou un as ou un deux. On voit donc que si dans les deux cens seize coups possibles de trois dez on ne veut compter as, 2, 3, & as, as, 2, & chacun des autres de cette espece, que pour un coup, c'est à dire, ne compter qu'une fois tous ceux qui arrivent

arrivent ou en trois ou en ſix façons ; ce nombre de deux cens ſeize reduit aux ſeuls coups qui ſont differens les uns des autres, ſera beaucoup moindre : il s'agit de trouver une methode pour déterminer ce nombre de coups differens les uns des autres pour tel nombre de dez que ce ſoit. En voici une tres generale & tres abregée qui dépend de la propoſition 30.

Soit $p = 6$: on aura le nombre cherché de coups pour un dé $= p$, pour deux dez $= p \times \frac{p+1}{2}$, pour trois dez $= p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3}$, pour quatre dez $= p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3} \times \frac{p+3}{4}$, pour cinq dez $= p \times \frac{p+1}{2} \times \frac{p+2}{3} \times \frac{p+3}{4} \times \frac{p+4}{5} \times$ &c. en ſorte que dans deux dez on aura vingt & un coups differens, cinquante-ſix dans trois dez, cent vingt-ſix dans quatre dez, deux cens cinquante-deux dans cinq dez, quatre cens ſoixante & deux dans ſix dez, ſept cens quatre-vingt-douze dans ſept dez, douze cens quatre-vingt-ſept dans huit dez, &c.

On pourra remarquer que ces nombres 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, & les autres ſuivans compoſent la ſixiéme bande tranſverſale de la Table, *p. 80*, continuée à diſcretion.

PROBLÉME

PROPOSITION XXXIII.

Pierre joue contre Paul au Paſſe-dix & tient le dé, Paul lui propoſe de lui donner un point à condition que cet as qu'il donne ſervira à rendre les coups bons lorſque Pierre amenera un as d'un de ſes trois dez. On demande ſi Pierre doit accepter ce parti.

LA raiſon de douter eſt que ſi ce quatriéme dé qui porte un as, donne à Pierre des coups favorables, qui ſans cela euſſent été contraires ou indifferens, il y en a pluſieurs auſſi entre ceux qui étoient indifferens, ou même favorables à Pierre, qui lui deviennent contraires.

Pour reſoudre cette queſtion, il faut conſulter la Table de la Propoſition 30 pour trois dez. On remarquera, 1°, qu'il

y a quarante-huit coups qui font gagner Pierre indépendamment de ce quatriéme dé ; 2°. qu'il y en a vingt-quatre qui l'euſſent fait recommencer, & qui par le moyen de ce nouvel as le font gagner. Ces vingt-quatre coups ſont, 6, 4, 1 ; 6, 5, 1 ; 6, 3, 1 ; 5, 4, 1 ; 3°. qu'il y en a neuf qui le font gagner, & qui ſans ce quatriéme dé l'euſſent fait perdre. Ces neuf coups ſont 4, 4, 2 ; 4, 3, 3 ; 6, 2, 2 ; 4°. qu'il y a trente-neuf coups qui le font perdre indépendamment du quatriéme dé, & trente-ſix qui le font perdre à cauſe de ce nouvel as, & qui ſans cela étoient indifferens. Ces trente-ſix coups ſont 1, 4, 2 ; 1, 2, 3 ; 1, 2, 5 ; 1, 2, 6 ; 1, 3, 4 ; 1, 3, 5 ; en ſorte qu'il reſte ſoixante coups indifferens, ſçavoir 4, 3, 2 ; 5, 3, 2 ; 6, 3, 2 ; 5, 4, 2 ; 6, 4, 2 ; 5, 4, 3 ; 6, 4, 3 ; 6, 5, 2. Il auroit donc dans ce parti de l'avantage pour Pierre, mais ce ne ſeroit que de la cinquante-deuxiéme partie de l'argent mis à la gageure.

On peut obſerver que ſi on ne comptoit un point au profit de Pierre que lorſque l'as, repreſenté par le quatriéme dé, ſert à rendre bon un coup qui eût été nul, le parti ſeroit deſavantageux à Pierre, & ſon deſavantage ſeroit preciſément le quadruple de ce qu'eſt ſon avantage dans la ſuppoſition précedente.

Ce Problême eſt, comme l'on voit, fort facile, & je ne l'ai mis ici que parcequ'il m'a été propoſé par un de mes amis, qui m'a dit avoir vû ſouvent jouer but à but ſuivant les conditions qu'on a expliquées dans l'énoncé du Problême.

PROBLÊME I.

SUR LE JEU DE LA RAFLE.

PROPOSITION XXXIV.

Pierre joue à la premiere Rafle avec un certain nombre de Joueurs à volonté. On demande quel ſera ſon avantage lorſqu'il aura un point quelconque depuis onze juſqu'à dix-huit.

IL y a deux ſortes de jeux de Rafle, ſçavoir la premiere Rafle, & les trois Rafles comptées. Je vais donner ici ce qui regarde la premiere Rafle, le Problême ſuivant ſera ſur les trois Rafles comptées. Voici quelques regles communes à ces deux jeux. 1°. On y joue avec trois dez. 2°. Tous les coups où il ne ſe trouve pas au moins deux dez ſemblables ſont reputés nuls, & on les recommence. 3°. A ces jeux il n'y a point de primauté, & lorſque deux ou pluſieurs Joueurs ſe trouvent avoir le même point, ils recommencent entr'eux pour voir qui gagnera. Voici quelques autres regles qui ſont particulieres au jeu de la premiere Rafle. 1°. Un Joueur dit qu'il a rafle lorſque les trois dez qu'il a jettés portent tous le même point. 2°. Rafle l'emporte ſur ceux qui n'ont que des points, en ſorte, par exemple, que celui qui aura rafle gagnera au préjudice de celui qui aura 17 ; hors ce cas celui qui a le plus haut point gagne. 3°. Une rafle plus haute l'emporte ſur une plus baſſe, par exemple rafle de 4 ſur rafle de 3, & rafle de 3 ſur rafle de 2. &c.

La ſolution de ce Problême s'entendra aiſément par un Exemple.

Je ſuppoſe donc qu'il y ait trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques : Pierre a déja joué & a amené onze. On demande s'il a de l'avantage, & quel eſt cet avantage.

Il faut d'abord conſulter la propoſition 30 pour trouver combien il y a de coups bons dans trois dez, c'eſt à dire de coups où il ſe trouve au moins deux dez ſemblables,

& combien il y a de ces coups pour amener chacun des differens points en particulier: enſuite il faut employer la methode analytique, examiner par ordre ce qui peut arriver dans les coups de Paul & de Jacques, & ce que les hazards differens de ces deux coups donnent à Pierre d'eſperance, ou de gain, ou de perte.

Je trouve qu'il y a trois coups pour amener 17 ou 4, ſix coups pour amener 16 ou 5, quatre coups pour amener 15 ou 6, neuf coups pour amener 14 ou 7, 13 ou 8, 10 ou 11, & enfin ſept coups pour amener 12 ou 9. Cela poſé, voici comme je raiſonne.

Lorſque Paul jouera ſon coup, Pierre perdra ſi Paul amene ou 18 ou 17, ou 16 ou 15, ou 14 ou 13, ou 12 ou raſle d'as, de deux & de trois, ce qui fait quarante-deux coups pour perdre. Il y a neuf coups pour que Pierre ſoit but à but avec Paul dans l'attente du coup de Jacques, & quarante-cinq coups pour que Paul amenant un point quelconque audeſſous de onze, Pierre n'ait plus à craindre que le coup de Jacques.

Lorſque Paul a amené un point quelconque audeſſous de onze, le ſort de Pierre eſt d'avoir quarante-cinq coups pour gagner tout ce qui eſt au jeu, & neuf coups pour partager avec Jacques, ſçavoir quand Jacques amene onze.

Si Paul a amené onze, le ſort de Pierre eſt d'avoir quarante-cinq pour partager également avec Paul le droit ſur tout ce qui eſt au jeu; neuf coups pour avoir ſon tiers ſur l'argent qui eſt au jeu; & enfin d'avoir quarante-deux coups pour perdre.

Si l'on reduit ce raiſonnement ſelon les regles de l'algebre, on trouvera que le ſort cherché de Pierre eſt $\frac{819}{1024}A$, en ſuppoſant que A exprime la miſe de chaque Joueur, ce qui fait voir que Pierre a du deſavantage lorſque jouant avec deux Joueurs il a onze. Ce deſavantage eſt tel qu'il pourroit ſans perte ni profit donner quarante ſols & une fraction de deniers à un Joueur qui voudroit prendre ſa place, ſuppoſé que A qui deſigne la miſe de chaque Joueur exprime une piſtolle.

On pourra trouver en cette maniere l'avantage ou le desavantage de Pierre, quelque soit son point, & quelque nombre de Joueurs qu'il y ait. En voici une Table qui donne l'avantage de Pierre, en supposant qu'il ait un point quelconque depuis onze jusqu'à dix-huit, autrement que par une rafle. L'on y suppose, comme ci-dessus, que le jeu soit aux pistolles.

TABLE.

	Pour deux Joueurs. avantage.			*Pour trois Joueurs.* avantage.			*Pour quatre Joueurs.* avantage.		
points.	liv.	sols,	den.	liv.	sols,	den.	liv.	sols,	den.
18	9	17	11	19	13	$9\frac{25}{96}$	29	8	$4\frac{585}{82944}$
17	8	8	9	15	9	$10\frac{71}{128}$	21	6	$11\frac{1119}{3072}$
16	7	10	0	12	19	$3\frac{21}{64}$	14	7	$1\frac{251}{256}$
15	6	11	3	10	11	$6\frac{9}{32}$	12	14	$5\frac{3009}{3072}$
14	5	6	3	7	12	$1\frac{25}{32}$	8	0	$4\frac{599}{1024}$
13	3	8	9	3	11	$3\frac{15}{32}$	2	3	$9\frac{825}{1024}$
12	1	17	6	0	11	$8\frac{5}{8}$			
11		6	3						

On voit par cette Table qu'entre deux Joueurs il y a de l'avantage à avoir onze, & qu'à trois Joueurs il y a du desavantage.

Lorsqu'il y a quatre Joueurs, on n'a de l'avantage que lorsqu'on a au moins treize. Je trouve qu'à douze points il y a sur une pistolle une livre douze sols de perte ou de desavantage, ce qui paroît d'abord assez étrange.

J'ai trouvé des personnes d'esprit qui croyoient voir évidemment que puisque c'est un avantage entre deux Joueurs d'avoir onze points, on devoit conclure que ce seroit aussi un avantage tel nombre de Joueurs qu'il y eût. Voici comme ils raisonnoient. Il est vrai que Pierre jouant lui troisiéme, & ayant onze points, a moitié moins d'es-

perance de gagner, que lorſqu'ayant onze points, il n'a affaire qu'à un Joueur; mais en récompenſe il a le double à gagner. Or le produit de $2 \times \frac{1}{2}$ étant $= 1$, il s'enſuit que Pierre ayant onze points, doit avoir de l'avantage, ſoit que le jeu ſoit entre trois Joueurs, ou qu'il ſoit ſeulement entre deux Joueurs. Ils employoient le même raiſonnement pour prouver que l'avantage de celui qui a onze points eſt le même, ſoit qu'il n'y ait que deux Joueurs, ſoit qu'il y en ait quatre, ou un autre nombre quelconque.

Ce raiſonnement eſt ſpecieux, mais il manque en ce que l'on ſuppoſe que l'eſperance que Pierre a de gagner eſt moitié moindre lorſque deux Joueurs ont à jouer après lui, que lorſqu'il n'y en a qu'un: ce qui n'eſt point vrai, quoique fort vrai-ſemblable. On ne peut trop chercher l'évidence en cette matiere, où l'on trouvera plus qu'en toute autre, que les apparences conduiſent à l'erreur.

PROBLÊME II.

SUR LE JEU DES TROIS RAFLES COMPTÉES.

PROPOSITION XXXV.

Pierre joue contre Paul à qui fera le plus de points en trois rafles comptées, c'eſt à dire, en trois coups tels qu'il ſe trouve au moins un doublet dans les trois dez. Il a amené trente-deux. On demande s'il a de l'avantage, & quel eſt cet avantage.

L'On pourroit reſoudre ce Problême par l'analyſe, en examinant par ordre tous les differents points qu'on peut amener avec un, deux, trois, quatre, &c. juſqu'à neuf dez, & en rejettant tous ceux où dans chaque trois dez il ſe trouveroit trois dez differens les uns des autres, & en exprimant tous ces differens hazards par des inconnuës qu'on détermineroit ſelon les regles ordinaires: mais cette voye ſeroit d'une longueur exceſſive,

& demanderoit un calcul de pluſieurs mois. Le Problême de la Propoſition 30 en fournit une tres abregée. Voici une Table qui contient tous les differens hazards qui peuvent arriver, & exprime l'avantage de Pierre pour tous les differens points qu'il aura depuis 32 juſqu'à 54.

TABLE.

points.	diverſes façons de les amener.	avantage.	livres.	ſols.
54 ou 9	1	884735	9	19
53 ou 10	9	884725	9	19
52 ou 11	45	884671	9	19
51 ou 12	147	884479	9	19
50 ou 13	369	883963	9	19
49 ou 14	765	882829	9	19
48 ou 15	1446	880618	9	19
47 ou 16	2484	876688	9	18
46 ou 17	3969	870235	9	16
45 ou 18	5869	860397	9	14
44 ou 19	8433	846095	9	11
43 ou 20	11493	826169	9	6

points.	diverſes façons de les amener.	avantage.	livres.	ſols.
42 ou 21	15027	799649	9	0
41 ou 22	19287	765335	8	13
40 ou 23	23886	722162	8	3
39 ou 24	28668	669608	7	11
38 ou 25	38867	607073	6	17
37 ou 26	38871	534335	6	0
36 ou 27	43171	452293	5	2
35 ou 28	47457	361665	4	1
34 ou 29	50607	363601	2	19
33 ou 30	52551	160443	1	16
32 ou 31	53946	53946	0	12

Cette Table eſt, comme l'on voit, rangée ſur quatre colonnes. La premiere deſigne tous les differens points que Pierre peut avoir depuis neuf juſqu'à cinquante-quatre. La ſeconde exprime le nombre de coups diffe-

rens que peuvent donner les points qui lui répondent dans la premiere colonne. La troiſiéme colonne donne l'avantage de Pierre pour tous les differens points qu'il peut avoir depuis trente-deux juſqu'à cinquante-quatre, en donnant à chacun de ces termes la quantité 1769472 pour dénominateur. La quatriéme colonne donne cet avantage en livres & en ſols, en ſuppoſant que le jeu ſoit aux piſtolles, c'eſt à dire, que Pierre ait mis une piſtolle au jeu. On a negligé les deniers.

On voit par cette Table que l'avantage d'avoir quelques-uns des differens points depuis cinquante-quatre juſqu'à quarante-deux, ne va qu'à vingt ſols de difference; & que celui d'avoir quelques-uns des nombres depuis cinquante-quatre juſqu'à quarante-huit, ne va qu'à quelques deniers.

On voit au contraire que cette difference change fort conſiderablement dans les nombres qui approchent de trente-deux. On peut découvrir par le raiſonnement que cela doit être à peu près ainſi.

Il paroît par la comparaiſon de cette Table avec celle de la Propoſition 31 pour neuf dez, qu'on auroit plus d'avantage ſi jouant avec trois dez trois coups de ſuite, tous les coups étoient bons indifferemment: car dans ce cas l'avantage d'un Joueur qui auroit pour point trente-deux ſeroit $\frac{767394}{100777696}$, ce qui ſeroit vingt & un ſols & quelques deniers d'avantage ou de profit, le jeu étant aux piſtolles.

PROBLEME

PROBLÊME
SUR LE JEU DES SAUVAGES,
APPELLÉ
JEU DES NOYAUX.

LE Baron de la Hontan fait mention de ce Jeu dans le ſecond Tome de ſes Voyages de Canada, *p. 113.* Voici comme il s'explique :

On y joue avec huit noyaux noirs d'un côté & blancs de l'autre : on jette les noyaux en l'air : alors ſi les noirs ſe trouvent impairs, celui qui a jetté les noyaux gagne ce que l'autre Joueur a mis au jeu : S'ils ſe trouvent ou tous noirs ou tous blancs, il en gagne le double ; & hors de ces deux cas il perd ſa miſe.

PROPOSITION XXXVI.

On demande lequel des deux Joueurs a de l'avantage, en ſuppoſant qu'ils mettent également au jeu.

LA ſolution de ce Problême dépend de la Propoſition 30, dont elle n'eſt qu'un cas particulier : Ce qu'on reconnoîtra ſi l'on imagine huit dez qui ayent chacun deux faces, ſur l'une deſquelles ſoit marqué un as, & ſur l'autre un deux. Cela ſuppoſé, il ſera clair que le Problême des Noyaux ſe réduit à celui-ci. Déterminer combien il y a à parier que jettant ces huit dez au hazard, on amenera ou un as & ſept deux, ou trois as & cinq deux, ou cinq as & trois deux, ou ſept as & un deux, ou deux as & ſix deux, ou quatre as & quatre deux, ou ſix as & double deux : ce qui ſe trouve compris dans la formule très generale de la Propoſition 30.

On trouvera qu'il y a, 1°, huit coups ſur 256 pour amener un noir & ſept blancs ; 2°. 56 coups pour avoir trois noirs & cinq blancs ; 3°. 28 coups pour avoir deux noirs

& six blancs; 4°. 70 coups pour avoir quatre noirs & quatre blancs. Il est évident qu'on ne peut les amener ou tous noirs ou tous blancs que d'une façon. Il suit de tout cela que si l'argent du jeu est appellé A, le sort de celui qui jette les noyaux sera $\frac{128 \times A + 2 \times A + \frac{1}{2}A}{256}$, & le sort de l'autre Joueur sera $\frac{126A + 2 \times 0 - \frac{1}{2}A}{256}$. Ainsi l'avantage de celui qui jette les noyaux est $\frac{3}{256}$; & pour que le jeu fût égal, il faudroit que celui qui jette les noyaux mît au jeu 22 contre l'autre 21.

On peut observer que l'inégalité de ce jeu ne porte aucun préjudice à ces Joueurs de l'autre monde, qui ne jouant entr'eux que des choses dont la proprieté leur est commune, doivent être assez indifferens pour le gain & pour la perte. Le mépris que ces Peuples ont pour ce que nous estimons le plus, est une espece de paradoxe qu'on ne doit point avancer sans preuve dans un Livre tel que celui-ci. La voici tirée du Baron de la Hontan: *Au reste*, dit cet agreable Voyageur, *ces jeux ne se font que pour des festins, & pour quelques autres bagatelles: car il faut remarquer que comme ils haïssent l'argent, ils ne le mettent jamais de leurs parties. Aussi peut-on assurer que l'interest n'a jamais causé de division entr'eux.*

Je crois devoir ajouter que ce Problême m'a été proposé par une Dame, qui m'en a donné presque sur le champ une solution fort juste, en se servant de la Table page 80: mais cette Table ne sert ici que par hazard, car si les noyaux au lieu d'avoir deux faces, en avoient davantage, par exemple quatre, cette Table ne seroit point suffisante, & le Problême seroit bien moins facile que le précedent, ainsi qu'on pourra le remarquer dans la Proposition suivante.

L'on suppose que les huit noyaux ont chacun quatre faces, sçavoir une blanche, une noire, une verte & une rouge. Pierre sera celui qui jette les noyaux, Paul sera l'autre joueur.

Si les noyaux ayant été jettés au hazard, il ſe trouve des quatre couleurs, Paul donnera B à Pierre. S'il n'y en a que de trois couleurs, Paul lui donnera $3B$; & s'il n'y en a que d'une ſeule couleur, c'eſt à dire, ſi les huit noyaux ſont ou tous blancs ou tous noirs, ou tous verts ou tous rouges, Paul lui donnera $4B$; enfin s'il n'y en a que de deux couleurs, Pierre donnera à Paul $2A$.

Cela poſé, *on demande de quel côté eſt l'avantage, & quel eſt cet avantage, en ſuppoſant que* A *ait à* B *un raport quelconque.*

L'on trouvera par la Propoſition 30 que ſi $B = A$, Paul aura de l'avantage à ce jeu, mais ce ne ſeroit que de cette fraction $\frac{233}{16384}$, ce qui n'eſt à peu près que la ſoixante & dixiéme partie de l'unité; & par conſequent afin que la condition de Pierre & de Paul fuſſent égales, il faudroit que B fût $= \frac{11592}{11359} A$, c'eſt à dire que Pierre devroit mettre au jeu onze mil cinq cens cinquante-deux contre Paul onze mil trois cens cinquante-neuf.

TROISIÈME PARTIE,

Où l'on donne la ſolution des cinq Problêmes proposés par Monſieur Huygens.

PROBLÈME I.

PROPOSITION XXXVII.

Pierre & Paul jouent enſemble avec deux dez ; Voici les conditions du jeu. Pierre gagnera en amenant ſix, & Paul en amenant ſept. Chacun des deux jouera deux coups de ſuite lorſqu'il aura les dez : cependant Pierre qui commencera n'en jouera qu'un pour la premiere fois. Il s'agit de déterminer le ſort de chacun de ces deux Joueurs, ou l'eſperance que chacun aura de gagner la partie.

SOLUTION.

PUISQUE chaque face de l'un des dez ſe peut trouver ſucceſſivement avec toutes les faces de l'autre, il eſt clair que les deux dez peuvent donner trente-ſix coups,

& que de ces trente-six coups il y en a cinq qui donnent le nombre de six, sçavoir as & cinq, cinq & as, deux & quatre, quatre & deux & terne; & six qui donnent le nombre de sept, sçavoir as & six, six & as, deux & cinq, cinq & deux, trois & quatre, quatre & trois.

Presentement soit nommé A l'argent du jeu, x le sort de Pierre lorsqu'il va jouer son coup, y son sort lorsque Paul va jouer son premier coup, z son sort lorsque Paul va jouer son second coup, & enfin u son sort lorsque le tour de Pierre revenant il va jouer le premier de ses deux coups.

On aura ces quatre égalités, $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}y$, $y = \frac{30}{36}z$, $z = \frac{30}{36}u$, $u = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; ce qui donne $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36} \times \frac{25}{36} \times \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; d'où l'on tire par reduction & transposition $S = \frac{103\,55}{226\,31}A$, ce qui exprime le sort de Pierre; & $A - S = \frac{122\,76}{226\,31}A$ qui exprime celui de Paul.

REMARQUE.

SI l'on supposoit que Pierre jouât d'abord un coup, & Paul deux coups, ensuite Pierre deux coups & Paul trois coups, ensuite Pierre trois coups & Paul quatre coups, & ainsi de suite, Paul jouant toujours un coup de plus que Pierre, le sort de Pierre seroit exprimé par une suite infinie dont il seroit fort difficile d'avoir la somme, cette suite seroit $= \frac{b}{f}A + \frac{d \times c^2 \times b}{f^4}A + \frac{d^2 \times c^3 \times b}{f^5}A + \frac{d^3 \times c^5 \times b}{f^9}A + \frac{d^4 \times c^5 \times b}{f^{10}}A + \frac{d^5 \times c^5 \times b}{f^{11}}A + \frac{d^6 \times c^9 \times b}{f^{16}}A + \frac{d^7 \times c^9 \times b}{f^{17}}A + \frac{d^8 \times c^9 \times b}{f^{18}}A + \frac{d^9 \times c^9 \times b}{f^{19}}A + \frac{d^{10} \times c^{14} \times b}{f^{25}}A +$ &c. en supposant $b = 5$, $c = 30$, $d = 31$, $f = 36$.

Il est aisé de remarquer l'ordre de la suite, & de la continuer à l'infini, l'expression du sort de Paul seroit la quantité qui manque à la suite qui exprime le sort de Pierre pour valoir A.

Si l'on supposoit que Pierre & Paul jouassent avec un dé, selon l'ordre qu'on vient de marquer, à qui le premier

ameneroit un ſix, on auroit pour expreſſion du ſort de Pierre une ſuite plus ſimple, ſçavoir $1 - p + p^3 - p^5 + p^8 - p^{11} + p^{15} - p^{19} + p^{24} - p^{29} +$ &c. en ſuppoſant que p ſoit $= \frac{5}{6}$.

PROBLÈME II.

PROPOSITION XXXVIII.

Trois Joueurs, Pierre, Paul & Jacques jouent enſemble, & s'accordent que tirant l'un après l'autre un jetton au hazard entre douze, dont huit ſeront noirs & quatre ſeront blancs, celui qui le premier aura tiré un jetton blanc gagnera. Voici l'ordre ſelon lequel ils jouent: Pierre tire le premier, Paul tire le ſecond, & Jacques le troiſième; enſuite Pierre recommence, & les autres le ſuivent ſelon leur rang, juſqu'à ce qu'un des Joueurs ait gagné. Il s'agit de trouver ce que chaque Joueur doit mettre au jeu, afin que le parti ſoit égal; ou bien, ce qui revient au même, il s'agit de déterminer quels ſeroient les divers degrés d'eſperance qu'auroit chacun des Joueurs de gagner une certaine ſomme qui ſeroit l'argent du jeu.

SOLUTION.

IL eſt clair que chacun des Joueurs pour parier également & ſans deſavantage, doit mettre au jeu à raiſon du plus ou moins de droit qu'il a ſur la partie, ou d'eſperance qu'il a de gagner. On voit bien, par exemple, qu'à cauſe de la primauté, Pierre a plus d'avantage en ce jeu que Paul, & Paul plus d'avantage que Jacques, puiſqu'il ſe peut faire que Pierre gagne ſans que Paul & Jacques ayent joué, & auſſi que Paul gagne ſans que le tour de Jacques ſoit venu. Mais combien Pierre a plus d'avantage que Paul, & Paul plus d'avantage que Jacques, & quelle eſt, proportionnellement à ces differens avantages des Joueurs, la difference des avances que chacun doit faire pour compoſer le fond du jeu? C'eſt ce qu'il faut chercher.

Il faut remarquer d'abord que le ſort d'une perſonne qui parie de prendre un jetton blanc entre douze, dont huit ſont noirs & quatre ſont blancs, eſt d'avoir un contre deux.

Cela ſuppoſé, ſi l'on nomme A l'argent du jeu, S le ſort de Jacques lorſque Pierre va tirer ſon jetton, y ſon ſort lorſque Paul va tirer le ſien, z ſon ſort lorſque c'eſt à lui à tirer, on aura ces trois égalités $S = \frac{2}{3}y$, $y = \frac{2}{3}z$, $z = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}S$; d'où l'on tirera $S = \frac{4}{19}A$, ce qui exprime le ſort de Jacques.

Pareillement pour trouver le ſort de Pierre, je nomme u ſon ſort lorſqu'il tire ſon jetton, t ſon ſort lorſque Paul tire le ſien, q ſon ſort lorſque Jacques tire ſon jetton. Cela ſuppoſé, j'ai ces trois égalités $u = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}t$, $t = \frac{2}{3}q$, $q = \frac{2}{3}u$; d'où l'on tire $u = \frac{9}{19}A$, ce qui exprime le ſort de Pierre. Or le ſort de Paul étant d'avoir l'argent du jeu moins la ſomme des juſtes pretentions de Pierre & de Jacques, on aura le ſort de Paul $= A - \frac{4}{19}A - \frac{9}{19}A = \frac{6}{19}A$. Par conſequent ſi l'on veut que le jeu ſoit de dix-neuf écus, il faudra que Pierre en mette neuf, Paul ſix, & Jacques quatre.

PROBLÊME III.

PROPOSITION XXXIX.

Pierre parie contre Paul que prenant, les yeux fermés, ſept jettons entre douze, dont huit ſont noirs & quatre ſont blancs, il en prendra trois blancs & quatre noirs. On demande combien Pierre & Paul doivent parier pour que la miſe de chacun ſoit dans la même proportion que leur ſort.

SOLUTION.

IL faut chercher d'abord combien de fois huit jettons peuvent être pris differemment quatre à quatre, enſuite combien de fois quatre jettons peuvent être pris differem-

ment trois à trois ; multiplier le nombre que donne la combinaiſon de huit jettons, pris quatre à quatre, par le nombre que donne la combinaiſon de quatre jettons pris trois à trois ; ce produit exprimera tous les coups que Pierre a pour gagner. Si on diviſe enſuite ce produit par le nombre qui exprime en combien de façons differentes ſept jettons peuvent être pris dans douze, l'expoſant de cette diviſion exprimera le ſort cherché.

On trouvera par la Table, page 80, Propoſition 10, que huit jettons peuvent être pris differemment ſoixante & dix fois quatre à quatre ; que quatre jettons peuvent être pris differemment quatre fois trois à trois, & enfin que douze jettons peuvent être pris ſept à ſept en ſept cens quatre-vingt-douze façons differentes. On aura donc $\frac{70\times4}{792} = \frac{280}{792}$ pour l'expreſſion du ſort de Pierre. Par conſequent le ſort de Paul ſera $\frac{512}{792}$. Donc ſi l'on veut que le fond du jeu ſoit une piſtole, il faudra pour que le pari ſoit égal, que Pierre y mette trois livres dix ſols huit deniers, & Paul ſix livres neuf ſols quatre deniers.

PROBLÊME IV.

PROPOSITION XL.

Pierre parie contre Paul que tirant, les yeux fermés, quatre cartes entre quarante, ſçavoir dix carreaux, dix cœurs, dix piques & dix trefles, il en tirera une de chaque eſpece. On demande quel eſt le ſort de ces deux Joueurs, ou ce qu'ils doivent mettre au jeu pour parier également.

SOLUTION.

ON trouvera par la Table qui a ſervi à la ſolution du Problême précedent, que quarante cartes peuvent être priſes quatre à quatre en quatre-vingt-onze mil trois cens quatre-vingt-dix façons differentes. Or dans ce nombre qui exprime toutes les manieres poſſibles dont quarante cartes peuvent être priſes differemment quatre à quatre, il

Il y en a dix mil favorables à Pierre. Pour le voir, il faut remarquer que s'il n'y avoit que dix carreaux & dix cœurs, il y auroit cent manieres poſſibles de prendre dans ces vingt cartes deux cartes de ces deux eſpeces; car chacun des dix carreaux pourroit être pris avec l'as de cœur, ce qui fait dix; ou bien avec le deux, ce qui fait encore dix, & ainſi de ſuite. Chacun des dix carreaux pourroit donc être pris avec chacun des dix cœurs, ce qui fait cent. Preſentement ſi à ces dix carreaux & à ces dix cœurs on ajoute dix trefles, il eſt clair que pour avoir toutes les manieres poſſibles de prendre trois cartes de differente eſpece entre ces trente, il faut multiplier par dix les cent manieres dont deux cartes de differente eſpece peuvent être priſes entre vingt, dont dix ſoient des carreaux & dix ſoient des cœurs.

Pour le comprendre plus facilement, on peut imaginer une carte qui ait cent points à la place des cent manieres differentes, dont deux cartes de differente eſpece peuvent être priſes dans vingt cartes, dont dix ſoient des carreaux & dix ſoient des cœurs. Alors on remarquera ſans peine que chacun de ces cent points ſe pourra trouver avec l'as de trefle, ce qui fait cent; enſuite chacun de ces cent points avec le deux de trefle, ce qui ſera deux cens; & avec le trois, ce qui ſera trois cens; & enfin les cent points ſucceſſivement avec les dix trefles, ce qui ſera mil. Cela étant conçu, on obſervera aiſément que la quatriéme puiſſance de dix, qui eſt dix mil, exprime en combien de manieres ont peut prendre quatre cartes de differente eſpece entre quarante, qui ſoient dix carreaux, dix cœurs, dix trefles & dix piques.

On aura donc le ſort de Pierre $= \frac{10000}{91390} A$, & par conſequent celui de Paul $= \frac{81390}{91390} A$.

COROLLAIRE.

SI l'on demandoit combien il y a à parier que Paul tirant treize cartes au hazard dans cinquante-deux, ne tirera pas toute une couleur, on trouveroit qu'il y a à parier 15875338899 contre 1.

Si l'on demandoit combien il y a à parier que Pierre tirant dix cartes au hazard entre quarante, ſçavoir un as, un deux, un trois, un quatre, un cinq, un ſix, un ſept, un huit, un neuf & un dix de carreau, autant de cœurs, de piques & de trefles, il tirera une dixaine complete, on trouveroit qu'il y a à parier 1048576 contre 84661952, à peu près 1 contre 808.

PROBLÈME V.

PROPOSITION XLI.

Pierre & Paul jouent enſemble aux dez; Jacques, qui eſt un tiers, tient vingt-quatre jettons entre ſes mains, & pouſſera trois dez autant de coups qu'il ſera neceſſaire pour que l'un & l'autre des deux Joueurs gagne. Voici les conditions du jeu. Lorſque les dez ameneront onze, Pierre prendra un jetton entre les vingt-quatre qui ſont entre les mains de Jacques; & lorſque les dez ameneront quatorze, Paul en prendra un; & le premier des deux qui aura pris douze jettons gagnera. On demande quel eſt le ſort des deux Joueurs.

SOLUTION.

IL faut remarquer d'abord que trois dez donnent deux cens ſeize coups, puiſque deux dez donnent trente-ſix coups, avec chacun deſquels chaque face du troiſiéme dé peut ſe trouver ſucceſſivement. On obſervera enſuite qu'entre ces deux cens ſeize coups il y en a vingt-ſept qui donnent un jetton à Pierre, ſçavoir ſix quatre & as qui arrive en ſix façons, ſix trois & deux qui arrive en ſix façons, cinq quatre & deux qui arrive en ſix façons, cinq cinq & as qui arrive en trois façons, quatre quatre trois qui arrive en trois façons, trois trois cinq qui arrive en trois façons: Et quinze qui donnent un jetton à Paul, ſçavoir ſix cinq trois qui arrive en ſix façons, cinq cinq quatre qui arrive en trois façons, ſix ſix deux qui arrive

en trois façons, quatre quatre six qui arrive en trois façons.

Cela posé, soient nommés

A l'argent du jeu,

x le sort de Pierre quand Pierre & Paul n'ont rien,

y le sort de Pierre quand Pierre a un jetton & que Paul n'a rien,

z le sort de Pierre quand Pierre a deux jettons & que Paul n'a rien,

w le sort de Pierre quand Pierre a trois jetons & que Paul n'a rien,

t le sort de Pierre quand Pierre a quatre jettons & que Paul n'a rien,

r le sort de Pierre quand Pierre a cinq jettons & que Paul n'a rien,

s le sort de Pierre quand Pierre a six jettons & que Paul n'a rien,

q le sort de Pierre quand Pierre a sept jettons & que Paul n'a rien,

p le sort de Pierre quand Pierre a huit jettons & que Paul n'a rien,

n le sort de Pierre quand Pierre a neuf jettons & que Paul n'a rien,

m le sort de Pierre quand Pierre a dix jettons & que Paul n'a rien,

o le sort de Pierre quand Pierre a onze jettons & que Paul n'a rien,

K le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul un jetton,

i le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul deux jettons,

l le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul trois jettons,

h le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul quatre jettons,

g le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul cinq jettons,

f le sort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul six jettons,

e le ſort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul ſept jettons,

d le ſort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul huit jettons,

c le ſort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul neuf jettons,

b le ſort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul dix jettons,

w le ſort de Pierre quand Pierre n'a rien & Paul onze jettons,

On aura

$$x = \frac{27y + 15K + 174x}{216}, \quad y = \frac{27z + 15x + 174y}{216},$$

$$z = \frac{27u + 15y + 174z}{216}, \quad u = \frac{27t + 15z + 174u}{216},$$

$$t = \frac{27r + 15u + 174t}{216}, \quad r = \frac{27s + 15t + 174r}{216},$$

$$s = \frac{27q + 15r + 174s}{216}, \quad q = \frac{27p + 15s + 174q}{216},$$

$$p = \frac{27n + 15q + 174p}{216}, \quad n = \frac{27m + 15p + 174n}{216},$$

$$m = \frac{27\omega + 15n + 174m}{216}, \quad \omega = \frac{27A + 15m + 174\omega}{216},$$

$$K = \frac{27x + 15i + 174K}{216}, \quad i = \frac{27K + 15l + 174i}{216},$$

$$l = \frac{27i + 15h + 174l}{216}, \quad h = \frac{27l + 15g + 174h}{216},$$

$$g = \frac{27h + 15f + 174g}{216}, \quad f = \frac{27g + 15e + 174f}{216},$$

$$e = \frac{27f + 15d + 174e}{216}, \quad d = \frac{27e + 15c + 174d}{216},$$

$$c = \frac{27d + 15b + 174c}{216}, \quad b = \frac{27c + 15w + 174b}{216},$$

$$w = \frac{27b + 15x0 + 174w}{216}.$$

De toutes ces égalités on tirera

$$y = \frac{3138105960 9A + 391652893555x}{705463489 64}, \text{ \& } K = \frac{704975208 39}{705463489 64}x;$$

& par conſequent on aura $x = \frac{27y + 15K + 174x}{216} =$

$$\frac{28242953648 1 \times A + 3524876041 95x + 3524876041 95 \times x}{9876488885496}, \text{ en}$$

ſubſtituant pour y & K leurs valeurs en x ; & enfin on aura en réduiſant, $x = \frac{282429536481}{282671677106} A$; ce qui exprime le ſort de Pierre ; & $A - x = \frac{244140625}{282671677106} A$, ce qui exprime le ſort de Paul.

PROBLÊME VI.

PROPOSITION XLII.

Déterminer generalement les partis qu'on doit faire entre pluſieurs Joueurs qui jouent à un jeu égal en pluſieurs parties.

QUOIQUE ce Problême ſoit le moins difficile de tous ceux qu'on peut ſe propoſer ſur cette matiere, les conditions du jeu étant égales pour tous les Joueurs, il n'a pas laiſſé d'exercer long-temps, & à ce qui paroît avec plaiſir, deux Geometres illuſtres, Mrs Fermat & Paſcal. Celui-ci employoit pour en venir à bout la methode analytique ; cette voye ſemble être ici la plus naturelle & la plus facile, mais elle a le défaut d'être d'une longueur exceſſive, car l'on ne peut trouver la ſolution des cas un peu compoſés qu'on n'ait parcouru tous ceux qui le ſont moins, en commençant par le plus ſimple. Ainſi, par exemple, pour trouver par cette voye le ſort de trois Joueurs Pierre, Paul & Jacques, en ſuppoſant que Pierre joue pour un point, Paul pour deux, & Jacques pour trois, il faudroit examiner quel ſeroit leur ſort, ſi Pierre jouant pour un point, Paul ne jouoit pareillement que pour un point, & Jacques ou pour un, ou pour deux, ou pour trois points ; 2°. quel ſeroit leur ſort ſi Pierre jouant pour deux points, Paul & Jacques jouoient pareillement pour deux points, ce qui retomberoit enſuite dans le cas précedent.

La methode de M. Fermat eſt plus ſçavante, & demande plus d'adreſſe dans ſon application. Il ne l'a employée que pour déterminer les partis entre deux Joueurs. M. Paſcal n'a pas cru qu'elle pût s'étendre à un plus grand nombre.

Je ferai voir que la methode de M. Fermat resout le Problême des partis d'une matiere très generale. Mais pour la faire entendre, & faire connoître les difficultés qu'y trouvoit M. Pascal, je crois ne pouvoir mieux faire que de rapporter ici sa Lettre du 24 Aoust 1654 qui est toute sur ce sujet. Elle s'adresse à M. Fermat, & se trouve dans ses Ouvrages posthumes imprimés *in folio* à Toulouse: L'on y verra l'explication de la methode de M. Fermat pour deux Joueurs, & les doutes de M. Pascal sur cette methode lorsqu'on veut l'appliquer à un plus grand nombre. Je donnerai ensuite la solution des difficultés de M. Pascal, & j'appliquerai cette methode à quelques Exemples, qui en feront connoître l'universalité.

Lettre de Monsieur Pascal à Monsieur de Fermat.

Du 24 Aoust 1654.

MONSIEUR,

Je ne pûs vous ouvrir ma pensée entiere touchant les partis de plusieurs Joueurs l'ordinaire passé, & même j'ai quelque repugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance qui étoit entre nous, & qui m'étoit si chere, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de differens avis sur ce sujet. Je vous veus ouvrir toutes mes raisons, & vous me ferez la grace de me redresser si j'erre, ou de m'affermir si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & sincerement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux Joueurs, votre methode qui procede par les combinaisons est très sûre: mais quand il y en a trois, je croi avoir demonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procediez de quelqu'autre maniere que je n'entens pas; mais la methode que je vous ai

ouverte, & dont je me ſers partout, eſt commune à toutes les conditions imaginables de toutes ſortes de partis, au lieu que celle des combinaiſons (dont je ne me ſers qu'aux rencontres particulieres où elle eſt plus courte que la generale) n'eſt bonne qu'en ces ſeules occaſions, & non pas aux autres.

Je ſuis ſûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de diſcours, & à vous un peu de patience.

Voici comment vous procedez quand il y a deux Joueurs.

Si deux Joueurs jouant en pluſieurs parties, ſe trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier, & trois au ſecond, pour trouver le parti il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu ſera decidé abſolument.

Il eſt aiſé de ſupputer que ce ſera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties ſe combinent entre deux Joueurs, & voir combien il y a de combinaiſons pour faire gagner le premier, & combien pour le ſecond, & partager l'argent ſuivant cette proportion. J'euſſe eu peine à entendre ce diſcours là ſi je ne l'euſſe ſçu de moi-même auparavant, auſſi vous l'aviez écrit dans cette penſée. Donc pour voir combien quatre parties ſe combinent entre deux Joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puiſqu'ils ne ſont que deux Joueurs) comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dez, parcequ'ils jouent en quatre parties; & maintenant il faut voir combien ces dez peuvent avoir d'aſſietes differentes. Cela eſt aiſé à ſupputer, ils en peuvent avoir ſeize qui eſt le ſecond degré de quatre, c'eſt à dire le quarré; car figurons-nous qu'une des faces eſt marquée *A*, favorable au premier Joueur, & l'autre *B* favorable au ſecond; donc ces quatre dez peuvent s'aſſeoir ſur une de ces ſeize aſſietes.

aaaa	1
aaab	1
aaba	1
aabb	1
abaa	1
abab	1
abba	1
abbb	2
baaa	1
baab	1
baba	1
babb	2
bbaa	1
bbab	2
bbba	2
bbbb	2

Et parcequ'il manque deux parties au premier Joueur, toutes les faces qui ont 2 *A* le font gagner; donc il en a 11 pour lui; & parcequ'il y

manque trois parties au ſecond, toutes les faces où il y a 3*B* le peuvent faire gagner; donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la ſomme comme 11 à 5. Voilà votre methode quand il y a deux Joueurs. Sur quoi vous dites que s'il y en a davantage, il ne ſera pas difficile de faire les partis par la même methode.

Sur cela, Monſieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux Joueurs fondé ſur les combinaiſons, eſt très juſte & très bon. Mais que s'il y a plus de deux Joueurs, il ne ſera pas toujours juſte, & je vous dirai la raiſon de cette difference.

Je communiquai votre methode à nos Meſſieurs, ſur quoi Monſieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'eſt à tort que l'on prend l'art de faire le parti ſur la ſuppoſition qu'on joue en quatre parties, vû que quand il manque deux parties à l'un & trois à l'autre, il n'eſt pas de neceſſité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouëra que deux ou trois, ou à la verité peut-être quatre.

Et ainſi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juſte ſur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vû que la condition naturelle du jeu eſt qu'on ne jouera plus dès que l'un des Joueurs aura gagné, & qu'au moins ſi cela n'étoit faux, cela n'étoit pas demontré.

De ſorte qu'il avoit quelque ſoupçon que nous avions fait un paralogiſme. Je lui répondis que je ne me fondois pas tant ſur cette methode des combinaiſons, laquelle veritablement n'eſt pas en ſon lieu en cette occaſion, comme ſur mon autre methode univerſelle à qui rien n'échape, & qui porte ſa démonſtration avec ſoi, qui trouve le même parti préciſément que celle des combinaiſons; & de plus je lui démontrai la verité du parti entre deux Joueurs par les combinaiſons en cette ſorte.

N'eſt-il pas vrai que ſi deux Joueurs ſe trouvant en cet état de l'hypoteſe qu'il manque deux parties à l'un & trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties completes, c'eſt à dire qu'on jette les quatre

dez

dez à deux faces tous à la fois ; n'eſt-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont déliberé de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit ſuivant la multitude des aſſietes favorables à chacun.

Il en demeura d'accord, & cela en effet eſt demonſtratif ; mais il nioit que la même choſe ſubſiſtât en ne s'aſtreignant pas à jouer quatre parties ; je lui dis donc ainſi :

N'eſt-il pas clair que les mêmes Joueurs n'étant pas aſtreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint ſon nombre, peuvent ſans dommage ni avantage s'aſtreindre à jouer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car ſi le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainſi il ait gagné, refuſera-t'il de jouer encore deux parties, vu que s'il les gagne il n'a pas mieux gagné, & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne lui ſuffiſent pas, puiſqu'il lui en faut trois, & ainſi il n'y a pas aſſez de quatre parties pour faire qu'ils puiſſent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il eſt aiſé de conſiderer qu'il eſt abſolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui eſt de finir dès qu'un aura ſon compte, ou de jouer les quatre parties entieres ; donc puiſque ces deux conditions ſont égales & indifferentes, le parti doit être tout pareil en l'une & en l'autre : or il eſt juſte quand ils ſont obligez de jouer quatre parties, comme je l'ai montré.

Donc il eſt juſte auſſi en l'autre cas. Voilà comment je le démontrai, & ſi vous y prenez garde, cette démonſtration eſt fondée ſur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux Joueurs, & qu'en l'une & en l'autre un même gagnera toujours, & ſi l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la même pointe pour trois Joueurs.

Et poſons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au ſecond, & deux au troiſiéme : pour faire

le parti ſuivant la même methode des combinaiſons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu ſera decidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux Joueurs; ce ſera en 3, car ils ne ſçauroient jouer trois parties ſans que la déciſion ſoit arrivée neceſſairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties ſe combinent entre trois Joueurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & ſuivant cette proportion diſtribuer l'argent de même que l'on a fait en l'hypoteſe de deux Joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaiſons en tout, cela eſt aiſé, c'eſt la troiſiéme puiſſance de 3, c'eſt à dire ſon cube 27.

Car ſi on jette trois dez à la fois (puiſqu'il faut jouer trois parties) qui ayent chacun trois faces, puiſqu'il y a trois Joueurs, l'une marquée *A* favorable au premier, l'autre *B* pour le ſecond, l'autre *C* pour le troiſiéme.

Il eſt manifeſte que ces trois dez jettez enſemble peuvent s'aſſeoir ſur 27 aſſietes differentes, ſçavoir,

aaa	1		
aab	1		
aac	1		
aba	1		
abb	1	2	
abc	1		
aca	1		
acb	1		
acc	1		3

baa	1		
bab	1	2	
bac	1		
bba	1	2	
bbb		2	
bbc		2	
bca	1		
bcb		2	
bcc			3

caa	1		
cab	1		
cac	1		3
cba	1		
cbb		2	
cbc			3
cca	1		3
ccb			3
ccc			3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les aſſietes où il y a un *A* ſont pour lui, donc il y en a dix-neuf.

Il manque deux parties au ſecond, donc toutes les aſſietes où il y a 2*B* ſont pour lui, donc il y en a ſept.

Il manque deux parties au troiſiéme, donc toutes les aſſietes où il y a 2*C* ſont pour lui, donc il y en a ſept.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun ſuivant la proportion de 19, 7. 7, on ſe tromperoit trop

groſſierement, & je n'ai garde de croire que vous le faſſiez ainſi. Car il y a quelques faces favorables au premier & au ſecond tout enſemble comme *ABB*, car le premier y trouve un *A* qu'il lui faut, & le ſecond 2*B* qui lui manquent, & ainſi *ACC* eſt pour le premier & le troiſiéme.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui ſont communes à deux comme valant la ſomme entiere à chacun, mais ſeulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'aſſiete *ACC*, le premier & le troiſiéme auroient même droit à la ſomme, ayant chacun leur compte; donc ils partageroient l'argent par la moitié; mais s'il arrive l'aſſiete *AAB*, le premier gagne ſeul, il faut donc faire la ſuppoſition ainſi:

Il y a treize aſſietes qui donnent l'entier au premier, & ſix qui lui donnent la moitié, & huit qui ne lui valent rien.

Donc ſi la ſomme entiere eſt une piſtole,
Il y a treize faces qui lui valent chacune une piſtole.
Il y a ſix faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ piſtole.
Et huit qui ne valent rien.

Donc en cas de parti il faut multiplier

13	par une piſtole, qui font	13
6	par une demi, qui font	3
8	par zero, qui font	0
Somme 27		Somme 16

Et diviſer la ſomme des valeurs 16 par la ſomme des aſſietes 27 qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui eſt ce qui appartient au premier en cas de partis, ſçavoir ſeize piſtoles de vingt-ſept.

Le parti du ſecond & du troiſiéme Joueur ſe trouvera de même.

Il y a 4	aſſietes qui lui valent une piſtole, multipliés	4
Il y a 3	aſſietes qui lui valent $\frac{1}{2}$ piſtole, multipliés	$1\frac{1}{2}$
Et 20	aſſietes qui ne lui valent rien,	0
Somme 27.		Somme $5\frac{1}{2}$.

Donc il appartient au ſecond Joueur cinq piſtoles, & $\frac{1}{2}$ ſur vingt-ſept, & autant au troiſiéme, & ces trois ſom-

mes $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ & 16 étant jointes, font les vingt-ſept.

Voilà, ce me ſemble, de quelle maniere il faudroit faire les partis par les combinaiſons, ſuivant votre methode, ſi ce n'eſt que vous ayez quelqu'autre choſe ſur ce ſujet que je ne puis ſçavoir.

Mais ſi je ne me trompe ce parti eſt mal juſte.

La raiſon en eſt qu'on ſuppoſe une choſe fauſſe, qui eſt qu'on joue en trois parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu là eſt qu'on ne joue que juſqu'à ce qu'un des Joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu ceſſe.

Ce n'eſt pas qu'il ne puiſſe arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver auſſi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, & rien de neceſſité.

Mais d'où vient, dira-t'on, qu'il n'eſt pas permis de faire en cette rencontre la même ſuppoſition feinte que quand il y avoit deux Joueurs?

En voici la raiſon.

Dans la condition veritable de ces trois Joueurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition eſt que dès qu'un a gagné, le jeu ceſſe; mais en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties: ſçavoir ſi le premier en gagne une qui lui manque, & un des autres deux qui lui manquent, car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux Joueurs, la condition feinte & la veritable convenoient pour les avantages des Joueurs en tout, & c'eſt ce qui met l'extrême difference entre la condition feinte & la veritable.

Que ſi les Joueurs ſe trouvant en l'état de l'hypotheſe, c'eſt à dire, s'il manque une partie au premier, & deux au ſecond, & deux au troiſiéme, veulent maintenant de gré à gré, & conviennent de cette condition qu'on jouera trois parties completes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la ſomme entiere (s'ils ſe trouvent ſeuls qui l'ayent atteint) ou s'il ſe trouve que deux l'ayent atteint, qu'ils la partageront également.

En ce cas le parti ſe doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le ſecond $5\frac{1}{2}$, le troiſiéme $5\frac{1}{2}$ de vingt-ſept piſtoles, & cela porte ſa démonſtration de ſoi-même, en ſuppoſant cette condition ainſi.

Mais s'ils jouent ſimplement à condition non pas qu'on joue neceſſairement trois parties, mais ſeulement juſqu'à ce que l'un d'entre eux ait atteint ſes parties, & qu'alors le jeu ceſſe ſans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier dix-ſept piſtoles, au ſecond cinq, au troiſiéme cinq de vingt-ſept.

Et cela ſe trouve par ma methode generale, qui détermine auſſi qu'en la condition précedente il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au ſecond, & $5\frac{1}{2}$ au troiſiéme, ſans ſe ſervir des combinaiſons, car elle va par-tout ſeule & ſans obſtacle.

Voilà, Monſieur, mes penſées ſur ce ſujet, ſur lequel je n'ai d'autre avantage ſur vous que celui d'y avoir beaucoup plus medité. Mais c'eſt peu de choſe à votre égard, puiſque vos premieres vûes ſont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laiſſe pas de vous ouvrir mes raiſons pour en attendre le jugement de vous.

Je croi vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaiſons eſt bonne entre deux Joueurs par accident, comme elle l'eſt auſſi quelquefois entre trois Joueurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, & deux à l'autre, parcequ'en ce cas le nombre des parties dans leſquelles le jeu ſera achevé ne ſuffit pas pour en faire faire gagner deux; mais elle n'eſt pas generale, & n'eſt bonne generalement qu'au cas ſeulement qu'on ſoit aſtreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De ſorte que comme vous n'aviez pas ma methode quand vous m'avez propoſé le parti de pluſieurs Joueurs, mais ſeulement celle des combinaiſons, je crains que nous ſoyons de ſentimens differens ſur ce ſujet; je vous ſupplie de me mander de quelle ſorte vous procedez en la recherche de ce parti.

Je recevrai votre réponſe avec reſpect & avec joye, quand même votre ſentiment me ſeroit contraire. Je ſuis, &c.

Le reſpect que nous avons pour la reputation & pour la memoire de M. Paſcal, ne nous permet pas de faire remarquer ici en détail toutes les fautes de raiſonnement qui ſont dans cette Lettre; il nous ſuffira d'avertir que la cauſe de ſon erreur eſt de n'avoir point d'égard aux divers arrangemens des lettres.

Pour prouver que des vingt-ſept [illegible] differentes que peuvent avoir les trois dez, il y en a dix-ſept qui font gagner Pierre, & cinq qui [illegible] deux autres Joueurs à qui il manque deux points; voici comme il me ſemble qu'on doit raiſonner.

Les trois Joueurs s'obligent à jouer trois parties, mais à cette condition que ſi Pierre à qui il ne manque qu'un point, le gagne avant que l'un ou l'autre des autres Joueurs ait gagné deux points, il gagnera la partie; & qu'il la perdra ſi l'un ou l'autre Joueur à qui il manque deux points, peut les prendre avant que Pierre en ait pris un. Il eſt évident que cette ſuppoſition revient preciſément à celle du Problême. Or ſelon cette ſuppoſition on trouvera que des vingt-ſept aſſietes des trois dez il y en a dix-ſept qui feront gagner Pierre, cinq qui feront gagner Paul, & cinq qui feront gagner Jacques, ainſi qu'il paroît par la Table ſuivante.

TABLE.

Pierre.				Paul.	Jacques.
aaa	*abc*	*bab*	*cac*	*bba*	*cca*
aab	*aca*	*bac*	*cba*	*bbb*	*ccc*
aac	*acb*	*bca*		*bbc*	*ccb*
aba	*acc*	*cab*		*bcb*	*cbc*
abb	*baa*	*cac*		*cbb*	*bcc*

REMARQUE I.

LA regle generale, c'eſt d'examiner en combien de coups au plus le jeu doit neceſſairement finir; prendre autant de dez qu'il y a de ces coups, & donner à ces dez autant de faces qu'il y a de Joueurs; enſuite il ne s'agit plus que de déterminer entre toutes les diſpoſitions poſſibles de ces dez, quelles ſont celles qui ſont avantageuſes & contraires à chacun des Joueurs, ce que l'on trouvera toujours aiſément par le Problême de la Propoſition 30. Ainſi, par exemple, en ſuppoſant que Pierre joue pour un point, Paul pour deux, & Jacques pour trois, ſi l'on veut ſçavoir le ſort de chacun de ces trois Joueurs, il faudra pour le découvrir imaginer quatre dez marqués de trois points chacun, par exemple d'un 1, d'un 2 & d'un 3; chercher enſuite par nos regles des combinaiſons en combien de façons il ſe peut trouver un as qui précede ou deux 2, ou trois 3, & en combien de façons deux 2 ou trois 3 peuvent préceder les as, ce que donnera la Table ſuivante.

TABLE.

	Pierre.	*Paul.*	*Jacques.*
1, 1, 1, 1	1	0	0
1, 1, 1, 2	4	0	0
1, 1, 1, 3	4	0	0
1, 1, 2, 2	5	1	0
1, 1, 3, 3	6	0	0
1, 1, 2, 3	12	0	0
1, 2, 2, 3	8	4	0
1, 2, 3, 3	12	0	0
1, 2, 2, 2	2	2	0
1, 3, 3, 3	3	0	1
2, 2, 2, 2	0	1	0
2, 2, 2, 3	0	4	0
2, 2, 3, 3	0	6	0
2, 3, 3, 3	0	0	4
3, 3, 3, 3	0	0	1

D'où il paroît que ſur quatre-vingt-un coups il y en a cinquante-ſept pour Pierre, dix-huit pour Paul, & ſix pour Jacques.

On peut reſoudre le Problême précedent d'une maniere plus abregée, en faiſant le raiſonnement qui ſuit.

Je remarque que l'on ne feroit tort à aucun de ces Joueurs, ſi on les obligeoit de jouer trois coups à ces conditions. 1°. Que ſi Pierre gagnoit un coup avant que Paul en eût gagné deux, il ſeroit ſenſé avoir gagné la Partie. 2°. Que ſi Paul gagnoit deux coups avant que Pierre en eût gagné un, Paul gagneroit. 3°. Que Jacques auroit gagné s'il gagnoit les trois coups. 4°. Que ſi des trois coups Paul en gagnoit un, & Jacques deux, les Joueurs ſe ſepareroient en retirant chacun leur miſe.

Pour calculer tout ceci facilement, on peut, comme ci-devant, imaginer trois dez qui ayent chacun trois faces, que ſur l'une ſoit un as, ſur l'autre un 2, ſur la troiſiéme un 3, & ſuppoſer que ſur les vingt-ſept coups qu'on peut amener avec ces trois dez, tous ceux où il ſe trouvera un as qui précede deux 2 ſeront favorables à Pierre, & que tous ceux où deux 2 précederont les as ſeront pour Paul. On trouvera par la Propoſition 30 qu'il y a dix-huit coups qui donnent A à Pierre, en ſuppoſant que A exprime tout l'argent du jeu, ſçavoir 1, 1, 1, qui arrive en une ſeule façon; 1, 1, 2; 1, 1, 3; 1, 3, 3, chacun en trois façons; 1, 2, 3, qui arrive en ſix façons; & ces deux-ci 1, 2, 2; 2, 1, 2. Qu'il y en a cinq favorables à Paul, ſçavoir 2, 2, 1; 2, 2, 2, & 2, 2, 3 en trois façons; & un ſeul coup qui donne A à Jacques. On trouvera enfin qu'il y a trois coups qui donnent $\frac{1}{3}A$ à chacun des Joueurs, ſçavoir 2, 3, 3.

Il eſt aiſé de remarquer quels ſont les cas où l'on peut abreger en cette ſorte la methode generale.

REMARQUE II.

LORSQU'IL y a pluſieurs Joueurs à qui il manque pluſieurs points, la methode qui précede par les combinaiſons & les changemens d'ordre, eſt auſſi longue, & tombe

tombe dans un auſſi grand détail que celle qui procede par l'Analyſe, car un même coup de dez pouvant être favorable à differens Joueurs, il paroît qu'on ne peut ſe diſpenſer de conſiderer ce que fournit chaque different coup de dez en particulier, & cet examen ne peut être que fort long, même avec la formule de la Propoſition 30. Mais la methode de M. Fermat outre pluſieurs avantages qu'elle a ſur celle de M. Paſcal, a celui de reſoudre d'une maniere infiniment courte & ſimple le Problême en queſtion, lorſqu'il ne s'agit que de deux Joueurs. Voici la regle.

Soit Pierre celui des deux Joueurs à qui il manque le moins de points; ſoit p le nombre des points qui manquent à Pierre pour gagner la partie; q, le nombre de ceux qui manquent à Paul; ſoit encore $p + q - 1 = m$.

Le ſort de Pierre ſera exprimé par une fraction dont le dénominateur ſera le nombre 2 élevé à l'expoſant m, & dont le numerateur ſera compoſé d'autant de termes de cette ſuite, $1 + m + m \times \frac{m-1}{2} + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ + &c. que q exprime d'unités. Le ſort de Paul ſera le complement de l'unité.

EXEMPLES.

Pierre joue pour cinq points, & Paul pour ſix points: le ſort de Pierre eſt 319 contre 193.

Pierre joue pour quatre points, & Paul pour ſix points: le ſort de Pierre eſt 191 contre 65, ce qui eſt un peu moins que 3 contre 1.

Pierre joue pour trois points, & Paul pour ſix points: le ſort de Pierre eſt 219 contre 37, ce qui eſt un peu moins que 6 contre 1.

Pierre joue pour deux points, & Paul pour ſix points: le ſort de Pierre eſt 15 contre 1.

Pierre joue pour un point, & Paul pour ſix points: le ſort de Pierre eſt 63 contre 1.

REMARQUE III.

SI l'on jouoit en un certain nombre de parties toujours en rabatant, c'eſt à dire, en ſorte que Pierre ayant par exemple trois parties de ſix, & venant à en perdre une, Paul ne marquât rien, & démarquât ſeulement une partie à Pierre, & ainſi du reſte; les avantages de Pierre ſeroient differens & beaucoup moindres qu'on ne les a trouvés dans la ſuppoſition précedente.

Voici une Table que je m'amuſai à faire il y a quelque temps en voyant jouer une partie de Piquet aſſez extraordinaire. C'étoit au grand cent, pour gagner il falloit avoir ſix parties, & l'on jouoit toujours en rabatant de la maniere qu'on vient de l'expliquer. Il ſemble que cette condition dût rendre le jeu interminable. Il arriva en effet que les Joueurs après avoir joué trente ou quarante parties, l'un ou l'autre approchant de temps en temps du but ſans pouvoir y atteindre, prirent le parti d'y renoncer, & de ſe ſeparer ſans la finir : mais comme l'un des Joueurs avoit trois poinſts ou trois parties marquées devant lui, on convint qu'il étoit juſte de repartir l'argent du jeu (c'étoit huit louis, qui faiſoient alors 128 liv.) le plus également qu'il ſe pourroit. Je trouvai que le Joueur qui avoit trois jettons devoit retirer preciſément 96 liv. & l'autre Joueur 32 livres.

Dans la ſuppoſition de la Remarque précedente il en auroit dû retirer 109 liv. 10 ſols, & l'autre 18 liv. 10 ſols, car ces deux nombres ſont entr'eux comme 219 & 37, & leur ſomme eſt 128.

TABLE.

Pierre a un point, ſon ſort eſt 7 contre 5.

Pierre a deux points, ſon ſort eſt 2 contre 1.

Pierre a trois points, ſon ſort eſt 3 contre 1.

Pierre a quatre points, ſon ſort eſt 5 contre 1.

Pierre a cinq points, ſon ſort eſt 11 contre 1.

PROBLÊME.

PROPOSITION XLIII.

Pierre jouant contre Paul a perdu une certaine somme d'argent, & n'ayant pour payer que la moitié de cette somme, il lui promet d'acquitter l'autre moitié en un certain nombre de payemens égaux. Paul y consent, à condition que Pierre dans ces payemens y comprendra un certain interest dont ils conviennent. On demande de combien seront ces payemens.

SOIT y le payement que Pierre doit faire tous les ans à Paul, q le nombre qui exprime sur quelle somme Pierre prend une unité d'interest par année, A la somme qui reste à payer; soit aussi, pour abreger, $p = \frac{q}{q+1}$.

On aura $y = \frac{A}{p + pp + p^3 + p^4 + p^5 + \&c.}$

Il faut remarquer que le dénominateur sera composé d'autant de termes que Pierre aura pris d'années pour achever de payer sa dette.

Exemple. Si l'on suppose que Pierre doive dix mille francs à Paul, & qu'il s'oblige de les lui payer en quatre payemens égaux d'année en année, en y comprenant l'interest de cinq pour cent; on trouvera, en substituant dans cette formule pour A & p leurs valeurs, que chaque payement doit être de 2820 liv. 2 s. 4 d. $\frac{13732}{34481}$.

Ce Problême, qui est fort facile pour des Geometres, seroit apparemment fort embarassant pour des Arithmeticiens, & comme il est d'un assez grand usage, j'ai jugé à propos de le mettre ici. Je l'ai cherché à l'occasion d'une question qui me fut faite il y a quelque temps par un de mes amis. La voici.

Il vouloit acheter une Terre dont le principal revenu étoit en bois, il y en avoit cent arpens en coupe reglée, & ils se coupoient tous les dix-sept ans. Il y avoit de vieux chênes parmi les taillis. Un Marchand lui proposoit de lui donner quatre-vingt livres de l'arpent pendant les

dix-ſept années en coupant les chênes avec les taillis. De plus, le Vendeur étoit certain par l'eſtimation des Connoiſſeurs, que les grands chênes étant coupés, le taillis, qui au bout des dix-ſept ans ſeroit revenu plus beau, vaudroit quarante livres l'arpent. *Sur cet expoſé il me demanda à combien il pouvoit évaluer la proprieté de ces bois, en eſtimant cette acquiſition ſur le pied du denier 20. Je trouvai par la formule précedente, qu'elle ſeroit évaluée, ſelon ſa juſte valeur, à plus de cent vingt-cinq mille livres, & à moins de cent vingt-cinq mille cent livres.

PROBLÊME.

PROPOSITION XLIV.

Le nombre qui exprime le raport du ſort de Pierre à celui de Paul, en ſuppoſant que Pierre parie contre Paul de faire certaine choſe du premier coup, étant donné, On demande quel eſt le nombre qui exprime le ſort de Pierre, en ſuppoſant qu'on lui accorde un certain nombre de coups pour faire la choſe propoſée.

SI l'on exprime par l'inconnue x ſon ſort lorſqu'ayant manqué à gagner du premier coup il va rejouer ſon ſecond coup, & y ſon ſort lors qu'ayant manqué à gagner du ſecond coup il va rejouer ſon troiſiéme coup, & z ſon ſort lors qu'ayant manqué de gagner à ſon troiſiéme coup il en va rejouer un quatriéme, &c. employant de ſuite les lettres x, y, z, u, t, r, &c. pour exprimer le ſort inconnu de Pierre à ſon ſecond, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, ſixiéme, ſeptiéme coup, &c. Nommant encore p le nombre des hazards favorables à Pierre; q le nombre des rencontres favorables à Paul, & ſuppoſant $m = p + q$, on aura le ſort de Pierre au commencement du jeu $= \frac{p}{m} + \frac{q}{m}x$, $x = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}y$, $y = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}z$, $z = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}u$, $u = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}t$, $t = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}r$, &c. & ſubſti-

tuant toutes ces quantités, on aura le ſort de Pierre exprimé par cette ſuite infinie $S = \frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{ppq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} + \frac{pq^4}{m^5} + \frac{pq^5}{m^6} + \frac{pq^6}{m^7} +$ &c. & ajoutant autant de termes de cette ſuite qu'il en ſera neceſſaire pour que S ſoit égale à $\frac{1}{2}$. On concluera que Pierre peut entreprendre la gageure but à but en autant de coups qu'on aura employé de termes de cette ſuite pour trouver $S = \frac{1}{2}$, ou un peu plus grand.

Cette methode eſt fort ſimple, & n'eſt preſque pas differente de celle qu'employe M. Hugens pour déterminer en combien de coups on peut parier but à but d'amener ſonnez avec deux dez; mais elles ont toutes deux cet inconvenient qu'elles ſont abſolument impraticables lorſque p étant un petit nombre, m & q en expriment de grands. Par exemple ſi l'on cherchoit en combien de coups Pierre pourroit parier avec quelque avantage d'avoir carte blanche au Piquet, il eſt clair qu'il faudroit ajouter plus de mille termes de cette ſuite, dans laquelle p étant 323, q ſeroit 578633, & m 578956, & qu'un travail de pluſieurs années ſuffiroit à peine pour cette ennuyeuſe ſupputation.

Voici la maniere d'éviter une ſi grande longueur de calcul.

J'obſerve, 1°, que la ſomme de cette ſuite infinie eſt toujours égale à l'unité, puiſqu'il eſt clair que s'il y a quelque poſſibilité que Pierre gagne du premier coup, il y a certitude qu'il gagnera ayant un nombre infini de coups à jouer de ſuite. Je ſubſtitue donc cette fraction $\frac{p}{m-q}$ à la place de l'unité, & j'en fais la diviſion à la maniere numerique, il me vient pour quotient la fraction $\frac{p}{m} + \frac{p \times q}{mm} + \frac{p \times qq}{m^3} + \frac{p \times q^3}{m^4} +$ &c. Je remarque en ſecond lieu qu'en faiſant cette diviſion il y a toujours un reſte qui pour la premiere operation eſt $+ \frac{pq}{m}$, pour la ſeconde $+ \frac{ppq}{mm}$, pour la troiſiéme $\frac{pq^3}{m^3}$, pour la quatriéme $\frac{pq^4}{m^4}$, en ſorte que $\frac{p}{m} =$

$\frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pq}{m}}{m-q}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} = \frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pqq}{mm}}{m-q}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} = \frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pq^3}{m^3}}{m-q}$, & $\frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} = \frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pq^4}{m^4}}{m-q}$; d'où il eſt clair que le nombre des termes de la ſuite que l'on veut ajouter en une ſomme étant h, on aura tous ces termes enſemble égaux à $\frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pq^h}{m^h}}{m-q}$.

De là je tire cette regle, que pour trouver le nombre de coups qui rendroit le ſort de Pierre égal à celui de Paul, il faut retrancher de l'unité la quantité $\frac{\frac{pq^h}{m^h}}{m-q}$, dans laquelle h ait une telle valeur que cette fraction $\frac{\frac{pq^h}{m^h}}{m-q}$ ſoit $\frac{1}{2}$ ou moindre que $\frac{1}{2}$; & par conſequent il faut que $m^{h+1} - q \times m^h$ ſoit plus grand que $2 \times m \times q^h - q^{h+1}$; ou, diviſant tout par $m-q$, m^h plus grand que $2 \times q^h$. Ce qui ſervira de formule.

PREMIER EXEMPLE.

SOIT ſuppoſé que l'on cherche en combien de coups Pierre peut parier d'amener ſix avec un dé, il faudra ſubſtituer 6, 5, 1 pour les lettres m, q, p, en ſorte qu'on aura $1 - \frac{5^h}{6^h} = \frac{p}{m-q} - \frac{\frac{pq^h}{m^h}}{m-q}$, & l'on connoîtra ſans peine que h étant 4, c'eſt à dire, Pierre ſe propoſant d'amener ſix en quatre coups, il y aura de l'avantage pour lui, car $1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296}$; or cette fraction $\frac{625}{1296}$ eſt plus petite que $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{23}{1296}$ qui exprimera l'avantage de Pierre en pariant d'amener un ſix avec un dé dans quatre coups. L'on connoîtra auſſi qu'en ſubſtituant 3 pour h, c'eſt à dire, que Pierre ſe propoſant

d'amener un ſix en trois coups, il y auroit pour lui du deſavantage, & que ſon deſavantage ſeroit $\frac{17}{216}$.

Il eſt clair que l'expoſant h doit être d'autant plus grand que q eſt plus grand par raport à p, en ſorte que, par exemple, q étant $= 5$, & par conſequent $m = 6$, h doit être $= 4$, & q étant $= 35$, h doit être $= 25$.

SECOND EXEMPLE.

SOIT le ſort de Pierre $\frac{1000}{9139}$, on aura $m = 9139$, & $q = 8139$; ſoit ſuppoſé $h = 6$, on trouvera le logarithme du nombre $9139 = 3.9608987$, ce qui étant multiplié par 6 donne 23.7653922 logarithme du nombre 9139 élevé à la ſixiéme puiſſance, & le logarithme du nombre $8139 = 3.9105710$, ce qui étant multiplié par 6 donne 23.4634260 logarithme du nombre 8139 élevé à la ſixiéme puiſſance.

Si l'on cherche les nombres qui correſpondent à ces logarithmes, on trouvera

$m^6 = 582628954909994978159161$ plus grand que $2 \times q^6 = 581374911690872909930322$.

Ainſi Pierre pariant contre Paul de tirer au hazard quatre cartes de differente couleur dans un Jeu compoſé de 40 cartes (voyez la Propoſition 40) ſon ſort s'il l'entreprend en ſix coups ſera à celui de Paul comme

291941499064558523194000, eſt à
290687455845436454965161,

& s'il l'entreprend en cinq coups, comme

280365599991735205000 eſt à
357153773000904846 99.

REMARQUE.

POUR éviter le tatonnement, il faudra convertir la formule $m^h = 2 \times q^h$ en une autre où h ſoit ſeule dans un des membres de l'égalité, ce qui ſe peut en employant

le calcul des exponentiels. Car je trouve qu'elle se change en cette autre $h = \frac{\log. 2}{\log. m - \log. q}$, & cette formule où h exprime le nombre de coups que l'on cherche, donnera d'abord la solution du Problême proposé.

Par exemple, si l'on veut sçavoir en combien de coups on peut parier à but d'amener sonnés avec deux dez, on trouvera en substituant pour m, 36, & pour q, 35, $h = \frac{3010300}{15563025 - 15440680} = 24 + \frac{14804}{24469}$, ce qui fait voir qu'on l'entreprendroit avec avantage en 25 coups, & avec desavantage en 24 coups.

Et de même si l'on cherche en combien de coups on peut parier à but d'avoir carte blanche au Piquet (voyez page 108) on aura, en substituant dans la formule pour m, 578956, & pour q, 578633, $h = \frac{3010300}{576264560 - 576240320} = 1241\frac{529}{606}$; ce qui fait voir qu'on l'entreprendroit avec avantage en 1242 coups, & avec desavantage en 1241 coups.

On pourra même découvrir par cette voye de combien sera l'avantage ou le desavantage par raport à tel nombre de coups que ce soit.

COROLLAIRE.

ON pourra, par la methode de ce Problême, resoudre celui qui suit : *Déterminer combien doit durer une partie où l'on joueroit toujours en rabattant, selon les conditions qu'on a expliquées, p. 178.* L'on trouvera, par exemple, que si l'on joue selon ces regles en trois parties de Piquet, il y a de l'avantage à parier que le jeu sera fini en sept parties, comme de 37 à 27; & du desavantage à parier qu'il sera fini en cinq, comme de 7 à 9. On trouvera dans cette formule $\frac{1}{4} + \frac{3^1}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{3^4}{4^5} +$ &c. la raison de l'avantage ou du desavantage qu'il y a à parier que le jeu sera decidé en un certain nombre de parties quelconque.

ques. Le premier terme de cette ſuite exprime le ſort de celui qui pariroit que la partie ſera décidée en trois coups; la ſomme des deux premiers exprime le ſort d'un Joueur qui pariroit que la partie ſeroit décidée en cinq coups; la ſomme des trois premiers exprime le ſort d'un Joueur qui pariroit que la partie ſeroit décidée en ſept coups, &c. On trouvera ſans beaucoup de peine des formules pareilles pour les autres cas, & l'on en trouvera la recherche aſſez curieuſe.

PROBLÊMES A RESOUDRE.

PREMIER PROBLÊME.

SUR LE JEU DU TREIZE.

Déterminer generalement quel eſt à ce jeu l'avantage de celui qui tient les cartes. On trouvera l'explication des regles de ce Jeu aux pages 54 & 55.

SECOND PROBLÊME.

SUR LE JEU APPELLÉ LE HER.

ON tire d'abord les places, l'on voit enſuite à qui aura la main. Suppoſons que ce ſoit Pierre, & nommons les autres Joueurs Paul, Jacques & Jean.

On convient de mettre une certaine ſomme au jeu; chacun des Joueurs prend pour cette ſomme un nombre égal de jettons; & celui-là gagne tout l'argent du jeu qui reſte avec un ou pluſieurs jettons, les autres Joueurs n'en ayant plus. Voici comment le jeu ſe conduit.

Pierre tient un jeu entier compoſé de cinquante-deux cartes, & en donne une à chacun des Joueurs, en commençant par ſa droite; & à la fin de chaque coup celui qui ſe trouve avoir la plus baſſe carte, perd un jetton qu'il met au milieu de la table.

Paul qui eſt le premier à la droite de Pierre, a droit s'il n'eſt pas content de ſa carte, d'en changer avec Jacques, qui ne peut la lui refuſer qu'au ſeul cas qu'il ait un Roy, alors Jacques dit *coucou*. Par ce terme celui qui a un Roy avertit les Joueurs que ſon voiſin de la gauche ayant voulu ſe défaire de ſa carte a été arrêté par la ſienne. Il en eſt de même de Jacques à l'égard de Jean, & de Jean à l'égard de Pierre.

Il faut ſeulement remarquer, 1°, que ſi Pierre n'eſt pas content de ſa carte, ſoit que ce ſoit celle qu'il s'eſt donné d'abord, ou celle qu'il a été contraint de recevoir de Jean, il peut, n'ayant perſonne avec qui changer, tenter de prendre une meilleure carte en coupant au hazard parmi celles qui lui reſtent en main. 2°. Que s'il arrive que Pierre ayant par exemple un cinq, ne veuille pas s'y tenir, & qu'en coupant il tire par exemple un valet, ſa carte deviendra un valet, & ainſi de toute autre carte, à l'exception du Roy, car Pierre tirant un Roy eſt renvoyé à ſa carte telle qu'elle ſoit, & il ſe trouve comme s'il ſe fût d'abord tenu à ſa carte.

Tout ce changement de cartes étant fait, chaque Joueur découvre la ſienne, & celui qui ſe trouve avoir la plus baſſe à commencer par l'as, met un jetton au jeu.

S'il ſe rencontre que deux ou pluſieurs Joueurs ayent la même carte, & que ce ſoit la plus baſſe, celui qui a la primauté, c'eſt à dire celui qui eſt le plus proche à la droite de Pierre perd & paye. Ce qui fait voir que l'on doit toujours s'y tenir lorſqu'on a donné au Joueur qui eſt à la gauche une carte pareille à celle qu'on reçoit de lui, de même que ſi on lui en eût donné une plus baſſe.

Le Joueur qui a perdu tous ſes jettons ſort du rang, & les autres continuent le jeu juſqu'à ce que tous, à l'exception d'un ſeul, ayent perdu tous leurs jettons, auquel cas celui qui reſte gagne l'argent de tous les Joueurs, & cela s'appelle en termes de Joueurs *gagner la poulle*.

Voici le Problême dont on demande la ſolution.

Quatre Joueurs, Pierre, Paul, Jacques & Jean ſont les ſeuls Joueurs qui reſtent, & ils n'ont plus qu'un jetton chacun.

Pierre tient les cartes, Paul eſt à ſa droite, & les autres enſuite. On demande quel eſt leur ſort par raport à la differente place qu'ils occupent, & avec quelle proportion ſe devroit repartir l'argent de la poulle, ce ſera par exemple dix piſtolles, s'ils vouloient la partager entr'eux ſans finir la partie.

TROISIÉME PROBLÊME.

SUR LE JEU DE LA FERME.

L'On met la Ferme à prix, & on l'adjuge à celui qui la porte le plus haut; par exemple ſi les jettons vallent vingt ſols, on la portera à deux ou trois piſtolles, & le Fermier les mettra ſur la table. Voici les regles de ce Jeu.

Chacun des Joueurs met un jetton au jeu, enſuite le Fermier leur diſtribue deux cartes, ſçavoir l'une de deſſus, & la ſeconde de deſſous. Ceux d'entre les Joueurs dont les deux cartes ſont plus que ſeize, donnent autant de jettons au Fermier que les cartes ſont de points au deſſus de ſeize. Par exemple ſi Paul qui eſt un des Joueurs reçoit d'abord un neuf, & pour ſa ſeconde carte un dix, cela fait 19, il payera trois jettons au Fermier. Il faut obſerver qu'à ce jeu l'as ne vaut qu'un.

Les Joueurs dont les deux cartes ſont moins que ſeize ont la liberté de s'y tenir dans la crainte de paſſer ſeize & de payer au Fermier pour le ſurplus. Ils ont auſſi la liberté de demander de nouvelles cartes dans l'eſperance ou de gagner la Ferme & les tours s'ils peuvent atteindre preciſément le nombre de ſeize, ou du moins d'en approcher en deſſous plus près qu'aucun autre Joueur, auquel cas ils gagneront les tours.

Lorſque tous les Joueurs paſſent le nombre de ſeize, les tours reſtent au jeu, & chaque Joueur y met de nouveau un jetton.

A ce jeu le nombre des Joueurs eſt indéterminé.

L'on y joue avec un jeu de cartes entier, & quelquefois on en ôte les ſix pour éviter que le nombre de ſeize ne ſe rencontre trop ſouvent.

Lorſque deux ou pluſieurs Joueurs ont un égal nombre de points, celui qui eſt le plus à la droite du Fermier eſt le ſeul qui gagne. Ainſi le Fermier ne peut jamais gagner les tours que lorſqu'il a un point plus proche de ſeize qu'aucun autre Joueur, & s'il avoit ſeize en même temps qu'un autre Joueur, il ne laiſſeroit pas de perdre la Ferme. & l'on feroit une nouvelle enchere. Tout ceci étant expliqué, voici le Problême dont on demande la ſolution.

Etant ſuppoſé un certain nombre déterminé de Joueurs, par exemple deux Joueurs Pierre & Paul, & que le prix des jettons ſoit de vingt ſols : On demande de combien devroit être le prix de la Ferme, afin qu'on la pût tenir ſans profit ni deſavantage.

QUATRIÈME PROBLÊME.

SUR LE JEU DES TAS.

POUR comprendre de quoi il s'agit, il faut ſçavoir qu'après les repriſes d'hombre un des Joueurs s'amuſe ſouvent à partager le jeu en dix tas compoſés chacun de quatre cartes couvertes, & qu'enſuite retournant la premiere de chaque tas, il ôte & met à part deux à deux toutes celles qui ſe trouvent ſemblables, par exemple deux Rois, deux valets, deux ſix, &c. alors il retourne les cartes qui ſuivent immédiatement celles qui viennent de lui donner des doublets, & il continue d'ôter & de mettre à part celles qui viennent par doublet juſqu'à ce qu'il en ſoit venu à la derniere de chaque tas, après les avoir enlevé toutes deux à deux, auquel cas ſeulement il a gagné.

Il eſt rare que l'on joue de l'argent à ce jeu, mais on y joue ſouvent des diſcretions, & les Dames ſe plaiſent à juger de l'évenement de certaines badineries qui les intereſſent, par le ſuccès qu'elles ont à ce jeu. Il faut obſerver que ce jeu n'eſt point de pur hazard, & que pour y réuſſir il faut de la conduite auſſi-bien que de la fortune.

L'on ſcait ou'il faut décharger les plus gros tas préfe-

rablement aux petits, mais l'on ne ſçait point exactement s'il eſt plus avantageux de décharger deux tas compoſés de trois cartes chacun, ou deux tas dont l'un ſera compoſé de quatre cartes, & l'autre de deux. L'on ſçait auſſi qu'il eſt plus facile de faire les tas avec un jeu de Piquet qu'avec un jeu d'Hombre, & avec un jeu d'Hombre qu'avec un jeu entier, ou bien avec deux jeux d'Hombre mêlez enſemble, ce qui feroit les tas de huit cartes. Mais ce que les Joueurs ignorent entierement, c'eſt le degré de facilité qu'il y a de réuſſir dans toutes ces differentes eſpeces. L'on demande une methode generale pour *déterminer quel eſt l'avantage ou le deſavantage de celui qui entreprend de faire les tas, ſoit que ce ſoit avec un jeu de Piquet, ou avec un jeu d'Hombre, ou avec un jeu entier; & quelle eſt la maniere de conduire ſon jeu le plus avantageuſement qu'il ſoit poſſible.*

FIN.

APPROBATION.

J'Ay lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier un manuſcrit intitulé, *Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de hazard.* Cet ouvrage m'a paru digne de la curioſité des plus profonds Analiſtes, & d'une utilité plus conſiderable & plus étendue que ne ſemble le promettre le ſujet qui y eſt traité. Fait à Paris le 24 Février 1707. *Signé*, SAURIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & feaux Conſeillers les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, Prevôts, leurs Lieutenans, & à tous autres nos Juſticiers & Officiers qu'il appartiendra, Salut. Le ſieur **** nous a fait expoſer qu'il a compoſé *un Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de hazard*, dont l'impreſſion pourroit être utile au public, & nous a très humblement ſupplié de le lui permettre, & de lui accorder à cet effet nos Lettres ſur ce neceſſaires. A CES CAUSES deſirant favorablement traiter l'Expoſant, nous lui avons permis & accordé, permettons & accordons par ces preſentes, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de notre Royaume, par tel Imprimeur ou Libraire qu'il voudra y choiſir, ledit Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de hazard, de telle marge, caractere, & autant de fois, & en tant de volumes que bon lui ſemblera, l'eſpace de ſix années conſecutives, à compter du jour & date des preſentes, pendant lequel temps nous faiſons très expreſſes défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre & debiter ledit Eſſai d'Analyſe, ſous pretexte d'augmentation, correction, changement de titre, fauſſes marques, ou autrement, de quelque maniere que ce ſoit, ni même d'en faire des extraits ou abregés; & à tous Marchands & autres d'en apporter ni diſtribuer en ce Royaume d'autres impreſſions que de celles qui auront été faites du conſentement par écrit de l'Expoſant, à peine de quinze cens livres d'amende payable par chacun des contrevenans, applicable un tiers à nous, un tiers à l'Hôpital general de notre bonne ville de Paris, & l'autre tiers à l'Expoſant ou à ceux qui auront droit de lui, de confiſcation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens dommages & interêts, à condition qu'il ſera mis deux exemplaires dudit Livre dans notre Biblioteque publique, un en celle du cabinet de nos Livres dans

notre château du Louvre, & un dans la Biblioteque de notre très cher & feal le ſieur PHELYPEAUX Comte de Pontchartrain, Chevalier, Chancelier, & Garde des Sceaux de France, Commandeur de nos Ordres, avant que de l'expoſer en vente, à la charge auſſi que l'impreſſion ſera belle, ſur du beau & bon papier, & faite dans notre Royaume, & non ailleurs, ſuivant qu'il eſt porté par les Reglemens faits pour la Librairie & Imprimerie, à peine de nullité des Preſentes, leſquelles ſeront regiſtrées dans le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de notredite ville de Paris. SI VOUS MANDONS ET ENJOIGNONS que du contenu en icelles vous faſſiez jouir pleinement & paiſiblement ledit Expoſant ou ceux qui auront droit de lui, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun empêchement. Voulons auſſi qu'en mettant au commencement ou à la fin dudit Livre une copie des Preſentes, elles ſoient tenues pour bien & dûement ſignifiées, & que foi y ſoit ajoutée, & aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secretaires comme à l'original : Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'execution d'icelles tous exploits & actes neceſſaires ſans demander autre permiſſion, nonobſtant clameur de haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Verſailles le premier jour de Mars l'an de grace mil ſept cens ſept, & de notre regne le ſoixante-quatre. Par le Roy en ſon Conſeil. *Signé*, LE PETIT.

Regiſtré ſur le Regiſtre n° 2 de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 104, n° 422, conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arreſt du Conſeil du treiziéme Aouſt 1703. A Paris ce 17 May 1707. Signé GUERIN, Syndic.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 2. *ligne* 18. *au lieu* d'hazarder, *mettez* de hazarder. *Page* 12. *ligne* 19. *au lieu de* a, b, c, *mettez* a, b, c, d; *ligne* 29. *au lieu de* ſort, *mettez* avantage. *Page* 13. *ligne* 8. *au lieu de* a, *mettez* A. *Page* 14. *ligne* 7. *au lieu de* 4, *mettez* 5. *Page* 15. *ligne* 4. *au lieu de* b, *mettez* g. *Page* 18. *ligne* 23. *au lieu de* deux, *mettez* trois. *Page* 21. *ligne* 18. *au lieu de* x, *mettez* +. *Page* 34. *ligne* 3. *au lieu de* carte ſimple contre carte double, *mettez* carte double contre carte ſimple. *Page* 40. *ligne* 30. *au lieu de* 49 x 25 x 16, *mettez* 49 x 25 x 17. *Page* 44. *ligne* 11. *au lieu de* 20825 x 5, *mettez* 195755; *ligne* 13. *au lieu de* p = o, *mettez* m = o. *Page* 80. *ligne* 27. *au lieu de* 35, *mettez* 55. *Page* 113. *ligne* 20. *au lieu de* 6 ou 8, *mettez* 6, ou 7, ou 8. *Page* 138. *ligne* 16. *au lieu de* quintuple, *mettez* quadruple. *Page* 139. *ligne* 11. *au lieu de* un quadruple & un ſimple, *mettez* un quadruple & un triple. *Page* 140. *ligne* 23. *au lieu de* un ſextuple & un ſimple, *mettez* un ſextuple & un triple. *Page* 164. *ligne derniere*, *au lieu de* 9876488885496, *mettez* 987648885496. *Page* 166. *ligne* 2. *au lieu de* matiere, *mettez* maniere.